1 Définition

Définition 1

Une **fonction polynôme du second degré** (ou **fonction trinôme**) est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe des constantes a (avec $a \neq 0$), b et c telles que $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$.
Cette expression de $f(x)$ s'appelle **forme développée ordonnée**.
Les réels a, b et c sont les **coefficients** de la fonction trinôme f.
La courbe d'une fonction polynôme du second degré s'appelle une **parabole**.

Capacité 1 ***Déterminer les coefficients d'un trinôme***

Pour chacune des fonctions trinômes définies ci-dessous, déterminer sa forme développée ordonnée en identifiant les coefficients a, b et c.

1. $f : x \mapsto 3x - 4x^2 + 5$ **2.** $f : x \mapsto (2x-1)^2$ **3.** $f : x \mapsto (3x-1)(1-x)$

2 Racines d'un trinôme

Définition 2

Soit f une fonction trinôme.
Les antécédents de 0 par f, s'ils existent, sont appelés **racines** du trinôme.
Ce sont les solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$.

Capacité 2 ***Déterminer les racines d'un trinôme par la règle du produit nul***

On rappelle la **règle du produit nul** :

$$A \times B = 0 \textit{ si et seulement si } A = 0 \textit{ ou } B = 0.$$

En utilisant la règle du produit nul, déterminer les racines des trinômes définis ci-dessous :

1. $f : x \mapsto (2x-1)(x+3)$ **2.** $g : x \mapsto (3x+1)^2$ **3.** $h : x \mapsto x^2 - 4$

3 Théorème des racines d'un trinôme

Théorème 1

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme développée ordonnée $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Le nombre de racines de f et donc de solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe du **discriminant** $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.
On distingue trois cas :

	$\boldsymbol{\Delta < 0}$	$\boldsymbol{\Delta = 0}$	$\boldsymbol{\Delta > 0}$
Racine(s) réelles de f	Pas de racine réelle	Une seule racine réelle : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	Deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Capacité 3 ***Déterminer les racines d'un trinôme avec le théorème fondamental***

En utilisant le théorème des racines d'un trinôme, déterminer les racines des trinômes définis ci-dessous :

1. $f : x \mapsto x^2 - x - 1$
2. $g : x \mapsto x^2 + x + 1$
3. $h : x \mapsto x^2 - 2x + 1$
4. $k : x \mapsto -3x^2 - 11x + 4$

4 Théorème du signe d'un trinôme

Théorème 2

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme développée ordonnée $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si f n'a pas de racines alors $f(x)$ est toujours du signe de a.
- Sinon $f(x)$ est du *signe de a à l'extérieur des racines* et du *signe opposé de a à l'intérieur des racines* (intérieur éventuellement vide si f n'a qu'une racine double).

Capacité 4 ***Utiliser le théorème du signe d'un trinôme***

1. Dans chaque cas, on donne le tableau de signes d'un trinôme de forme développée ordonnée $f(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer le signe de a et le signe du discriminant Δ.

a. Trinôme f.

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. Trinôme g.

x	$-\infty$		2		10		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c. Trinôme h.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$+$	

d. Trinôme k.

x	$-\infty$		$+\infty$
$k(x)$		$-$	

2. Déterminer les racines puis dresser le tableau de signes du trinôme $T : x \mapsto -x^2 + x + 2$.