1 Intégrale et aire sous une courbe de fonction positive

Propriété 1

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

- Une unité d'aire est l'aire d'un rectangle de côtés 1 unité d'abscisse et 1 unité d'ordonnée.
- L'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est l'intégrale de a à b de f qui se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- On calcule $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ avec n'importe quelle primitive F de f et on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,3]$ par $f(x) = x$.

   On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan d'unités 2 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée.

   a. Représenter graphiquement le domaine $\mathscr{D}$ délimité par l'axe des abscisses, $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

   b. Calculer l'aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unitées d'aires puis en cm^2.

2. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = \mathrm{e}^{-t}$.

   a. Soit x un réel positif, que représente $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$?

   b. Justifier que $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

   c. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini ?

2 Calculs d'intégrale à l'aide de primitives

Propriété 2

On généralise la définition de l'intégrale à des fonctions continues qui ne sont pas forcément positives, de plus on accepte que la borne inférieure a de l'intégrale ne soit pas forcément inférieure à la borne supérieure b. Les intégrales peuvent alors prendre des valeurs négatives.
Soit f une fonction positive sur un intervalle I et soit a et b deux réels dans I qui ne sont pas forcément dans l'ordre croissant.
L'intégrale de a à b de f se note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et peut se calculer avec n'importe quelle primitive F de f :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

De plus, permuter les bornes de l'intégrale équivaut à prendre son opposé :

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_1^0 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_1^2 x(1-x)\,\mathrm{d}x$
5. $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$
7. $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$
8. $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$

3 Propriétés de l'intégrale

Propriété 3

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soir a, b et c trois réels appartenant à I.
De plus λ désigne une constante réelle.

- ☞ $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b - a$ *Intégrale de 1 sur un segment = longueur du segment*
- ☞ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ *Relation de Chasles*
- ☞ $\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b gx)\,\mathrm{d}x$ *Linéarité par rapport à la somme*

☞ $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *Linéarité par rapport au produit par une constante*

Exercice 3

Soit f et g deux fonctions continues sur $[0\,;4]$, on donne :

- $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$ et $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$.
- $\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$.

1. Calculer les valeurs de $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Calculer les valeurs de $\int_0^1 3f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_0^3 f(x)+3g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^3 f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x$.

4 Valeur moyenne

Propriété 4

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec a distinct de b.
La **valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$ est :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4

1. Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[0\,;2]$.

2. Démontrer que la fonction F définie sur $[1\,;2]$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln.
En déduire la valeur moyenne de la fonction ln sur l'intervalle $[1\,;2]$.

3. Déterminer la valeur moyenne de la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{1-2x}$ sur l'intervalle $[2\,;5]$.