Exercice 1 *Logarithme et continuité*

Une entreprise produit chaque année entre 100 et 900 pneus pour tracteurs.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;9]$ par

$$f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6\ln(x).$$

On admet que la fonction f modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu, exprimé en centaines d'euros, pour x centaines de pneus produits.

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;9]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;9]$ on a : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x}$.

2. **a.** Justifier les variations suivantes de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;9]$:

x	1		6		9
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

b. Démontrer que, sur l'intervalle $[1\,;9]$, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α.

c. Déterminer par balayage un encadrement au centième près de α. Détailler les étapes.

Exercice 2 *Fonction réciproque*

f est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[-4\,;5]$. On donne son tableau de variation :

x	-4		5
$f(x)$	3	$\searrow$	-6

1. Compléter le texte :

f est …… et strictement …… sur sont intervalle de définition $[-4\,;5]$ et son intervalle image est $f([-4\,;5]) = \ldots\ldots.$
D'après une propriété du cours, f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle …
… et dont l'intervalle image est $f^{-1}(\ldots\ldots) = \ldots\ldots.$

2. Dresser le tableau de variation de sa fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 3 *Convexité et dérivation*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

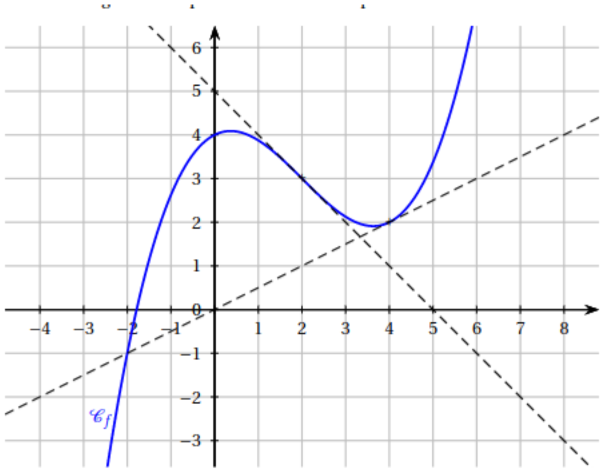
$$f(x) = x\ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.
3. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente T.

Exercice 4 *Convexité*

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



Parmi les affirmations suivantes, sélectionner celle qui est cohérente avec le graphique :

- **Affirmation 1 :** f est convexe sur $]-\infty\,;\,0,5]$, concave sur $[0,5\,;\,3,5]$ puis convexe sur $[3,5\,;\,+\infty[$.
- **Affirmation 2 :** f est convexe sur $]-\infty\,;\,2]$ et concave sur $[2\,;\,+\infty[$.
- **Affirmation 3 :** f est concave sur $]-\infty\,;\,2]$ et convexe sur $[2\,;\,+\infty[$.

Exercice 5 *Convexité et dérivation*

Soit f la fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ telle que pour tout $x \in [-2\,;\,4]$:

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x} + 3$$

1. On note f' la fonction dérivée de f. Démontrer que pour tout réel $x \in [-2\,;\,4]$, on a :
$$f'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x}$$
2. On note f'' la fonction dérivée de f'. Démontrer que pour tout réel $x \in [-2\,;\,4]$, on a :
$$f''(x) = (8x-4)\mathrm{e}^{-2x}$$
3. Étudier le signe de f'' sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ et en déduire plus grand intervalle sur lequel f est convexe.