Maths complémentaires, le coin de la physique

Lien vers le cours

Le secret inavoué des professeurs de physique

alt

Capacité 1

Soit la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée première et f'' sa fonction dérivée seconde.

Pour tout réel x :

- $f(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ donc $f'(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$
- en notation différentielle : $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$

Capacité 2

La loi horaire, en unités du Système International, du mouvement d'un point mobile qui se déplace suivant un axe Ox est, pour un instant t en secondes :

$$x(t) = 10t^2 - 8t + 5 \text{ en mè tres}$$

- La vitesse $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ de ce point mobile est : $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 10 \times 2t - 8 \quad \mathrm{m.s^{-1}}$
- L'accélération $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ de ce point mobile est : $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 10 \times 2 \quad \mathrm{m.s^{-2}}$

Capacité 3

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x un réel.

- $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^2 \iff x^2 = 2 \iff \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ \text{ou } x = -\sqrt{2} \end{cases}$
- $\mathrm{e}^{2-x} = 1 \iff 2 - x = \ln(1) \iff 2 = x$

Capacité 3

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x un réel.

- $\mathrm{e}^{2-x} = 0$ n'a pas de solution car une exponentielle ne s'annule jamais.
- $\mathrm{e}^{2-x} = 3 \iff 2 - x = \ln(3) \iff 2 - \ln(3) = x$
- $\mathrm{e}^{2-x} = -3$ n'a pas de solution car une exponentielle est toujours strictement positive.
- $\mathrm{e}^{2-x} = \mathrm{e}^{x^2} \iff 2 - x = x^2 \iff \begin{cases} x = -2 \\ \text{ou } x = 1 \end{cases}$

Capacité 3

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x un réel strictement positif.

- $\ln(x) = 0 \iff \mathrm{e}^{\ln(x)} = \mathrm{e}^0 \iff x = 1$
- $\ln(x) = 1 \iff \mathrm{e}^{\ln(x)} = \mathrm{e}^1 \iff x = \mathrm{e}^1 \approx 2,718$
- $\ln(x) = 2 \iff \mathrm{e}^{\ln(x)} = \mathrm{e}^2 \iff x = \mathrm{e}^2$

Capacité 4

Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty]$ par $g(x) = x\ln(x)$.

g est dérivable sur $[0;+\infty]$ et on note g' sa fonction dérivée.

Pour tout réel $x > 0$, on a, en appliquant la formule de dérivation d'un produit :

$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

Capacité 4

Pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \ln(x) + 1$.

- On résout l'équation :
  $g'(x) = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$
- On résout l'inéquation :
  $g'(x) > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$

Capacité 4

On en déduit que :

- Si $x \in]-\infty; \mathrm{e}^{-1}]$, on a $g'(x) < 0$, donc g strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$
- Si $x \in]\mathrm{e}^{-1}; +\infty[$, on a $g'(x) > 0$, donc g strictement croissante sur $]\mathrm{e}^{-1}; +\infty[$

Capacité 5

On part de la décomposition de la formule de Newton :

$$2\ln(T) - 3\ln(a) = \ln(4) + 2\ln(\pi) - \ln(G) - \ln(M+m)$$

On applique les règles opératoires du $\ln$.

$2\ln(T) = \ln(T^2)$ et $3\ln(a) = \ln(a^3)$ et $2\ln(\pi) = \ln(\pi^2)$ donc l'égalité s'écrit :

$$\ln(T^2) - \ln(a^3) = \ln(4) + \ln(\pi^2) - (\ln(G) + \ln(M+m))$$

Capacité 5

On applique encore les règles opératoires du $\ln$.

$\ln(T^2) - \ln(a^3) = \ln\left(\frac{T^2}{a^3}\right)$ et $\ln(4) + \ln(\pi^2) = \ln(4\pi^2)$ et $\ln(G) + \ln(M+m) = \ln(G(M+m))$ donc l'égalité s'écrit :

$$\ln\left(\frac{T^2}{a^3}\right) = \ln(4\pi^2) - \ln(G(M+m))$$

Capacité 5

On applique une dernière règle opératoire du $\ln$.

$\ln(4\pi^2) - \ln(G(M+m)) = \ln\left(\frac{4\pi^2}{G(M+m)}\right)$ donc l'égalité s'écrit :

$$\ln\left(\frac{T^2}{a^3}\right) = \ln\left(\frac{4\pi^2}{G(M+m)}\right)$$

Capacité 5

On peut appliquer l'exponentielle des des deux côtés pour simplifier les $\ln$ et on obtient la troisième loi de Kepler sous sa forme habituelle :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

Capacité 6

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone employé en archéologie pour dater la matière organique retrouvée lors de fouilles.

La formule suivante donne l'âge T, en années, d'un échantillon extrait lors de fouilles archéologiques, en fonction du pourcentage p % de carbone 14 qu'il contient :

$$T = 8264 \ln\left(\frac{100}{p}\right)$$

Capacité 6 (question 1)

$$T = 8264 \ln\left(\frac{100}{p}\right)$$

p varie dans l'intervalle $]0;100]$.

Capacité 6 (question 2 méthode 1)

$$T = 8264 \ln\left(\frac{100}{p}\right)$$

T est dérivable sur l'intervalle $]0;100]$ comme composée de fonctions dérivables.

$T = 8264 \ln u$ avec $u : p \mapsto \frac{100}{p}$ donc pour tout $p \in]0;100]$, on a :

$$T'(p) = 8264 \frac{u'(p)}{u(p)} = 8264 \frac{-\frac{100}{p^2}}{\frac{100}{p}} = -8264 \frac{1}{p}$$

Capacité 6 (question 2 méthode 2)

$$T = 8264 \ln\left(\frac{100}{p}\right)$$

Avant de dériver on change de forme.

Pour tout $p \in]0; 100]$, on a $T(p) = 8264(\ln(100) - \ln(p))$, donc :

$$T'(p) = 8264 \times (-\frac{1}{p})$$

Capacité 6 (question 2 méthode 2)

Pour tout $p \in]0;100]$, on $T'(p) = 8264 \times (-\frac{1}{p})$ donc $T'(p) < 0$.

La fonction T est donc strictement décroissante sur $]0;100]$.

Capacité 6 (question 3)

Si $p = 5$ alors :

$$T = 8264 \ln(100/5) = 8264 \ln(20) \approx 24757 \text{ ans}$$

Capacité 6 (question 4)

La datation au carbone 14 a permis d'estimer l'âge d'une momie à 2500 ans.

$$2500 = 8264 \ln(100/p) \iff p = \frac{100}{\mathrm{e}^{2500/8264}} \approx 74$$

Capacité 7 (question 1)

À un instant t, pour n moles, on a :

$$\boxed{P(t)V(t) = nrT(t)} \text{ où } r \text{ est une constante}$$

donc en appliquant le $\ln$ et ses règles opératoires :

$$\ln(P(t)) + \ln(V(t)) = \ln(nr) + \ln(T(t))$$

Capacité 7 (question 2)

On dérive par rapport au temps t, les deux membres de l'égalité en appliquant la formule $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

$$\frac{P'(t)}{P(t)} + \frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

Capacité 8 (question 1)

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = -\log(x)$.

- $f(10^{-3}) = -\log(10^{-3}) = -(-3) = 3$
- $f(x) = 4 \iff -\log(x) = 4 \iff -\frac{\ln(x)}{\ln(10)} = 4$
- $f(x) = 4 \iff x = \mathrm{e}^{-4\ln(10)} = (\mathrm{e}^{\ln(10)})^{-4} = 10^{-4}$

Capacité 8 (question 2)

En chimie, le caractère acido-basique d'une solution se mesure avec un indicateur noté pH :

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H_3O^+}]$$

$[\mathrm{H_3O^+}]$ est la concentration des ions hydronium exprimée en $\mathrm{mol.L}^{-1}$
.

Capacité 8 (question 2)

Pour un acide on a : $1 < \mathrm{pH} < 7$ c'est-à-dire :

- $1 < -\log[\mathrm{H_3O^+}] < 7 \iff -1 > \log[\mathrm{H_3O^+}] > -7$
- donc
  $1 < -\log[\mathrm{H_3O^+}] < 7 \iff 10^{-1} > [\mathrm{H_3O^+}] > 10^{-7}$

Capacité 8 (question 2)

Pour une base on a : $1 < \mathrm{pH} < 7$ c'est-à-dire :

- $7 < -\log[\mathrm{H_3O^+}] < 14 \Longleftrightarrow -7 > \log[\mathrm{H_3O^+}] > -14$
- donc $7 < -\log[\mathrm{H_3O^+}] < 14 \Longleftrightarrow 10^{-7} > [\mathrm{H_3O^+}] > 10^{-14}$

Capacité 8 (question 2)

- Pour le sang, on a : $[\mathrm{H_3O^+}] = 3,98 \times 10^{-8}\ \mathrm{mol.L^{-1}}$.
- Le pH du sang est donc de $-\log(3,98 \times 10^{-8}) \approx 7,4$.
- Le pH du sang est compris entre 7 et 14 et proche de 7 donc le sang est légèrement basique.

Exercice supplémentaire logarithme 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln((x-3)(1-2x))$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, on le notera $\mathcal{D}$.
2. Démontrer que pour tout réel $x \in \mathcal{D}$, on a :

$$f'(x) = \frac{7-4x}{(x-3)(1-2x)}$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathcal{D}$.

Exercice supplémentaire logarithme 2

Soit la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\frac{1-2x}{x-3}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g, on le notera $\mathcal{D}$.
2. Démontrer que pour tout réel $x \in \mathcal{D}$, on a :

$$g'(x) = \frac{5}{(1-2x)(x-3)}$$

3. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathcal{D}$.

Capacité 9 (question 1)

On considère l'équation différentielle (E) définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E)\ :\ y' - 3y = 2$$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{2}{3}$.

Pour tout réel x, on a $f'(x) = 0$ et $-3f(x) = 2$ donc $f'(x) - 3f(x) = 2$.

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle (E).

Capacité 9 (question 1)

On considère l'équation différentielle (E) définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E)\ :\ y' - 3y = 2$$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{2}{3}$.

Pour tout réel x, on a $f'(x) = 0$ et $-3f(x) = 2$ donc $f'(x) - 3f(x) = 2$.

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle (E).

Capacité 9 (question 1)

On considère l'équation différentielle (E) définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E)\ :\ y' - 3y = 2$$

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 6\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{3}$.

Rappel $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.

Pour tout réel x, on a $g'(x) = 18\mathrm{e}^{3x}$ et $-3g(x) = -18\mathrm{e}^{3x} + 2$ donc $g'(x) - 3g(x) = 2$.

La fonction g est donc solution de l'équation différentielle (E).

Capacité 9 (question 2)

On considère l'équation différentielle (E) définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E)\ :\ y' - 3y = 2$$

Soit k une constante réelle et la fonction h_k définie sur $\mathbb{R}$ par $h_k(x) = k\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{3}$.

Pour tout réel x, on a $h_k'(x) = 3k\mathrm{e}^{3x}$ et $-3h_k(x) = -3k\mathrm{e}^{3x} + 2$ donc $h_k'(x) - 3h_k(x) = 2$.

La fonction h_k est donc solution de l'équation différentielle (E).

Capacité 9 (question 2)

On considère l'équation différentielle (E) définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E)\ :\ y' - 3y = 2$$

On a démontré que la fonction h_k définie sur $\mathbb{R}$ par $h_k(x) = k\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{3}$ est solution de l'équation (E).

La fonction h_k vérifiant la condition initiale $h_k(0) = 5$ est telle que :

$$k\mathrm{e}^{3\times 0} - \frac{2}{3} = 5 \Longleftrightarrow k = 5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$$

Capacité 10 (1/ 2)

Un échantillon contient initialement $N_0 = 3 \times 10^9$ noyaux radioactifs dont la constante radioactive est λ.

Le nombre de noyaux radioactifs encore présents à l'instant t est noté $N(t)$ et vérifie l'équation différentielle (E) :

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

D'après une propriété du cours, la solution générale de l'équation différentielle (E) est $N(t) = k\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Capacité 10 (2/ 2)

D'après une propriété du cours, la solution générale de l'équation différentielle $N'(t) = -\lambda N(t)$ est $N(t) = k\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

On calcule k pour que la condition initiale $N(0) = 3 \times 10^9$ soit vérifiée.

$N(0) = 3 \times 10^9 \iff 3 \times 10^9 = k\mathrm{e}^{-\lambda \times 0} \iff 3 \times 10^9 = k$

On en déduit que pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$N(t) = 3 \times 10^9 \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Capacité 11 (1/2)

D'après une propriété du cours une solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$.

On applique cette propriété pour l'équation (E) avec $a = -4$ et $b = 8$: une solution de l'équation différentielle (E) est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = k\mathrm{e}^{-4x} + \frac{8}{4} = k\mathrm{e}^{-4x} + 2$$

Capacité 11 (2/2)

Une solution de l'équation différentielle (E) est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = k\mathrm{e}^{-4x} + 2$

De plus la solution recherchée doit vérifier la condition initiale $y(0) = 4$. On peut déterminer k en résolvant une équation :

$$y(0) = 4 \iff k\mathrm{e}^{-4\times 0} + 2 = 4 \iff k + 2 = 4 \iff k = 2$$

La solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 4$ est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = 2\mathrm{e}^{-4x} + 2$.

Capacité 12 (Question 1)

Soit t un temps en secondes, la température $\theta(t)$ de la boisson vérifie :

$$(E) \quad \theta'(t) = -\frac{h \times S}{(m_1 + m_2) \times c} \times \theta(t) + \frac{h \times S}{(m_1 + m_2) \times c} \times \theta_e$$

- $\theta_e = 5$ degrés est la température extérieure et $S = 4,0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^2$ est la surface de la gourde. h est le coefficient d'échange convectif dans l'air égal à 10 Watts par mètre carré et par degré Celsius, et c est la capacité thermique massique du système étudié égale ici à $3,6 \times 10^3$ Joules par kilogramme par degré Celsius.
- $m_1 = 172$ g est la masse de la gourde et $m_2 = 750$ g celle de la boisson chaude

Capacité 12 (Question 1)

En remplaçant par les valeurs numériques des paramètres, la température $\theta(t)$ de la boisson est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad \theta'(t) = -\frac{10 \times 4 \times 10^{-2}}{922 \times 3,6 \times 10^3} \times \theta(t) + \frac{10 \times 4 \times 10^{-2}}{922 \times 3,6 \times 10^3} \times 5$$

c'est-à-dire

$$(E) \quad \theta'(t) = -\frac{4 \times 10^{-4}}{3319,2} \times \theta(t) + \frac{2 \times 10^{-3}}{3319,2}$$

Capacité 12 (Question 1)

En posant $a = -\frac{4\times10^{-4}}{3319{,}2}$ et $b = \frac{2\times10^{-3}}{3319{,}2}$, d'après une propriété du cours une solution de l'équation (E) est de la forme :

$$\theta(t) = k\mathrm{e}^{at} - \frac{b}{a} \text{ avec } k \text{ ré el}$$

Capacité 12 (Question 2)

On calcule la constante k à partir de la condition initiale $\theta(0) = 50$:

$$50 = k\mathrm{e}^{a\times 0} - \frac{b}{a} \iff 50 + \frac{b}{a} = k$$

On en déduit que la température θ de l'eau dans la gourde est telle qu'au temps $t \geqslant 0$:

$\theta(t) = (50 + \frac{b}{a})\mathrm{e}^{at} - \frac{b}{a}$ où $a = -\frac{4\times 10^{-4}}{3319{,}2}$ et $b = \frac{2\times 10^{-3}}{3319{,}2}$