Correction des capacités du cours lois à densité

Capacité 1 ***Distinguer variable aléatoire discrète et variable continue***

1. Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$. X est-elle une variable continue ?

2. Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y suivant une loi géométrique de paramètre $p = 0,4$. Y est-elle une variable continue ?

3. Un métro passe toutes les minutes à la station *Hôtel de ville*. On considère un voyageur arrivant aléatoirement sur le quai et la variable aléatoire T donnant son temps d'attente.

   a. Quelles sont les valeurs possibles pour T ? T est-elle une variable continue ?

   b. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(T \leqslant 0,25)$, $\mathbb{P}(0,25 \leqslant T)$ et $\mathbb{P}(0,25 \leqslant T \leqslant 0,4)$.

1) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(3\,;\,0,4)$ $\quad p = 0,4$

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

X prend ses valeurs dans $\{0\,;1\,;2\,;3\}$

X est discrète mais pas continue

2) Y suit une loi géométrique de paramètre $p = 0,4$

Pour tout entier $k \geq 1$

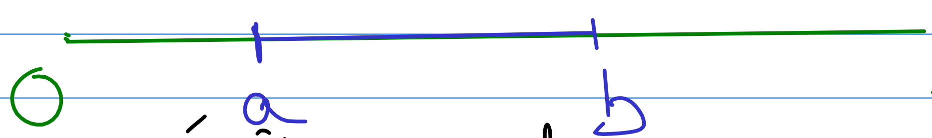
$$P(Y=k) = (1-p)^{k-1}p$$

Y prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers strictement positifs

Y est discrète mais pas continue.

3) T prend ses valeurs dans l'intervalle $[0;1]$

L'arrivée de la personne à l'arrêt de bus étant aléatoire on peut considérer que la probabilité que T soit comprise entre deux valeurs a et b est proportionnelle à la longueur de l'intervalle $[a;b]$.



Évènement	Probabilité
$0 \leq T \leq 1$	$P(0 \leq T \leq 1) = 1$
$a \leq T \leq b$	$P(a \leq T \leq b) = b - a$

Notons que si les évènements considérés pour les v.a. discrètes sont des valeurs isolées ou leur réunion, pour les v.a continues les évènements sont des intervalles ou leur réunion.

b) Om a :

$$P(T \leq 0{,}25) = 0{,}25$$

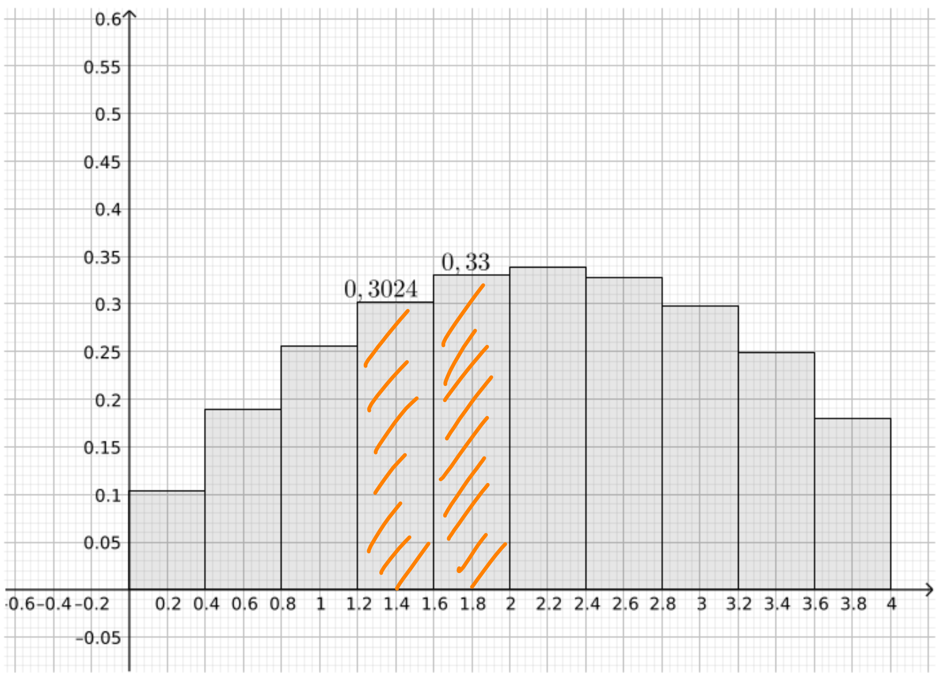
$$P(0{,}75 \leq T) = 0{,}25$$

$$P(0{,}25 \leq T \leq 1) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

Activité 1

On considère un certain modèle de smartphone. Soit T la variable aléatoire réelle continue qui à chaque smartphone associe sa durée de vie en années. Cette durée peut prendre toute valeur de l'intervalle $[0\,;4]$. On souhaite déterminer la probabilité $\mathbb{P}(1{,}2 \leqslant T \leqslant 2)$ qu'un smartphone pris au hasard ait une durée de vie comprise entre $1{,}2$ et 2 ans.

1. On dispose tout d'abord de l'histogramme ci-dessous réalisé à partir d'un échantillon de smartphones avec en abscisse la durée de vie et en ordonnée la probabilité. Les mesures de durée de vie ont été regroupées dans 10 classes d'amplitude $0,4$.



En déduire une estimation de $\mathbb{P}(1{,}2 \leqslant T \leqslant 2)$.

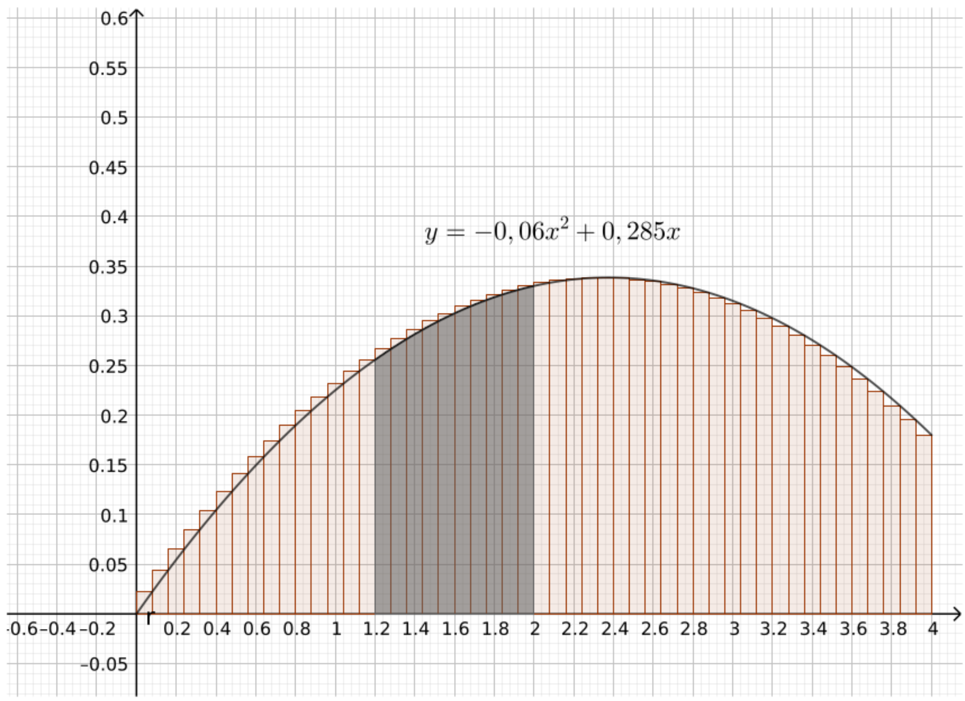
$P(1{,}2 \leq T \leq 1{,}6) = (1{,}6 - 1{,}2) \times 0{,}3024 \simeq 0{,}121$

$P(1{,}6 \leq T \leq 2) = (2 - 1{,}6) \times 0{,}33 \simeq 0{,}132$

donc $P(1{,}2 \leq T \leq 2) = P(1{,}2 \leq T \leq 1{,}6) + P(1{,}6 \leq T \leq 2)$

$P(1{,}2 \leq T \leq 2) \simeq 0{,}253$

2. Un échantillon de taille plus importante a été réalisé ce qui a permis de regrouper les mesures dans des classes plus nombreuses et de plus faible amplitude : 50 classes d'amplitude 0,08.



En augmentant encore la taille de l'échantillon et le nombre de classes, on observe que les hauteurs des rectangles de l'histogramme suivent la courbe d'une fonction f définie sur $[0\,;4]$ par

$$f(x) = -0,06x^2 + 0,285x$$

a. Vérifier que $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. Comment pourrait-on calculer $\mathbb{P}(1,2 \leqslant T \leqslant 2)$ à l'aide de la courbe de la fonction f ?

a) $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx = \left[-0,06\times\frac{1}{3}x^3 + 0,285\times\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$

$\displaystyle = 0,285\times\frac{16}{2} - 0,06\times\frac{64}{3} = 1$

b) Pour calculer $P(1,2 \leq T \leq 2)$ il suffit d'additionner les aires des rectangles de l'histogramme dont la base est comprise entre 1,2 et 2.
On peut approcher cette aire par l'intégrale :
$\displaystyle\int_{1,2}^{2} f(x)dx = \left[-0,02x^3 + 0,1425x^2\right]_{1,2}^{2} \simeq 0,239$

Capacité 2 ***Déterminer si une fonction est une densité de probabilité***

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 0{,}2 \text{ si } t \in [2\,;7] \\ f(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Démontrer que f est une densité de probabilité de support $I = [2\,;7]$.

2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(t) = 1-(2t+1)\mathrm{e}^{-2t}$.

   a. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée F'.

   b. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = F'(t) \text{ si } t \geqslant 0 \\ f(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On admettra que $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{y}{e^y} = 0$

   Démontrer que f est une fonction de densité de probabilité de support $[0\,;+\infty[$.

   c. Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[0\,;+\infty[$, calculer $P(2<X<3)$.

1)
- f continue sur $[2;7]$
- f nulle en dehors de $[2;7]$
- f positive sur $[2;7]$
- $\int_2^7 f(t)\,dt = \int_2^7 0{,}2\,dt = 0{,}2\times(7-2) = 1$

f est donc une densité de probabilité de support $[2;7]$

2) a) F dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$

Pour tout réel $t \geq 0$, $F'(t) = -\left(2e^{-2t} - 2(2t+1)e^{-2t}\right)$

$F'(t) = 4te^{-2t}$

b) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = F'(t) = 4te^{-2t} \text{ si } t \geq 0 \\ f(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- f continue sur $[0;+\infty[$
- f positive sur $[0;+\infty[$
- f nulle en dehors de $[0;+\infty[$
- Soit $x \geq 0$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_0^x$$

car F primitive de f

$$\int_0^x f(t)\,dt = F(x) - F(0)$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = 1 - (2x+1)e^{-2x}$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = 1 - \frac{2x}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}}$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$

et $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{y}{e^{y}} = 0$

donc par composition

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = 0$$

De même $\lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$

et $\lim_{y \to +\infty} \frac{1}{e^{y}} = 0^+$

donc par composition

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0^+$$

Par somme on a donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt = 1$$

Finalement f vérifie toutes les caractéristiques d'une fonction de densité.

$y \to +\infty \; e^y$

c. Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[0\,;+\infty[$, calculer $P(2 < X < 3)$.

$$P(2<X<3) = \int_2^3 f(t)\,dt$$

$$= \Big[F(t)\Big]_2^3$$

$$P(2<X<3) = F(3) - F(2)$$

Capacité 3 ***Déterminer une fonction de répartition de loi à densité***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 3\mathrm{e}^{-3t} \text{ si } t \geqslant 0 \\ f(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que f est une fonction de densité de probabilité de support $[0\,;+\infty[$.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[0\,;+\infty[$.

   Déterminer une expression de la fonction de répartition F de X.

1) . f est continue sur $[0;+\infty[$

. f est positive sur $[0;+\infty[$

. f nulle en dehors sur $[0;+\infty[$

. Soit $x \geq 0$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 3e^{-3t}\,dt$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 3e^{-3t}\,dt$$

$$= \left[-e^{-3t}\right]_0^x$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = 1 - e^{-3x}$$

On a par composition puis somme :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt = 1$$

f vérifie toutes les caractéristiques d'une fonction de densité donc c'est une densité de probabilité.

2) X v.a. de densité de f

F fonction de répartition de X

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \text{sinon } \int_0^x f(t)\,dt = 1 - e^{-3x} \end{cases}$$

Capacité 4 ***Calculer l'espérance ou la variance d'une loi à densité***

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{6}t + \dfrac{1}{3} \text{ si } t \in [0;2] \\ f(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

a. Démontrer que f est densité de probabilité.

b. Soit X une variable aléatoire de densité f.
Calculer l'espérance et la variance de X.

2. Soit Y une variable aléatoire de densité g définie par $g(t) = \dfrac{3}{t^4}$ si $t \geqslant 1$ et $g(t) = 0$ sinon.
Démontrer que Y possède une espérance et une variance.

1) a) • f est affine sur $[0;2]$ donc elle est continue sur $[0;2]$

• Pour tout réel $t \in [0;2]$, on a :
$f(t) \geqslant 0$

• $f = 0$ en dehors de $[0;2]$

• $\int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} dt$

$\int_0^2 f(t)dt = \left[\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t\right]_0^2$

$\int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{12} \times 2^2 + \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

f est donc une fonction de densité de probabilité

b) Soit X une v.a. de densité f

$$\int_0^2 t f(t)\,dt = \int_0^2 t \times \left(\frac{1}{6}t + \frac{1}{3}\right) dt$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{3}t\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times t^3 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} t^2\right]_0^2$$

$$\int_0^2 t f(t)\,dt = \frac{8}{18} + \frac{4}{6} = \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

L'espérance de X est donc égale à :

$$E(X) = \frac{10}{9}.$$

2) Soit $x \geq 1$:

$$\int_1^x t g(t)\,dt = \int_1^x \frac{3}{t^3}\,dt$$

$$= \left[3 \times \frac{t^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^x$$

$$= \left[-\frac{3}{2}t^{-2}\right]_1^x$$

$$\int_1^x t g(t)\,dt = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2}$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{3}{2} \times \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ par somme

donc $\int_1^{+\infty} t\,g(t)\,dt = \frac{3}{2}$

L'espérance de Y est donc définie

et $E(Y) = \frac{3}{2}$

Capacité 5 ***Déterminer la fonction de répartition d'une loi uniforme continue***

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme continue sur l'intervalle $[-2\,;8]$.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X et représenter graphiquement F.
2. En déduire les probabilités suivantes :

a. $\mathbb{P}(X \leqslant 0)$ **b.** $\mathbb{P}(-1 < X < 3)$ **c.** $\mathbb{P}(3 \leqslant X)$

1) Pour tout réel $x \in [-2\,;8]$, on a

$F(x) = \int_{-2}^{x} \frac{1}{8-(-2)}\,dt = \frac{1}{10}\int_{-2}^{x} dt = \frac{x+2}{10}$

. Pour tout réel $x < -2$, on a $F(x) = 0$

. Pour tout réel $x > 8$, on a $F(x) = 1$

2) a) $P(X \leq 0) = F(0) = 0$

b) $P(-1 < X < 3) = F(3) - F(-1)$

$$= \frac{3+2}{10} - \frac{(-1)+2}{10}$$

$$P(-1 < X < 3) = \frac{5}{10} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = 0,4$$

c) $P(3 \leq X) = 1 - P(X < 3)$

$$= 1 - F(3)$$

$$P(3 \leq X) = 1 - \frac{3+2}{10} = \frac{1}{2}$$

Capacité 6 ***Utiliser une loi uniforme continue***

Un détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 g et 1 200 g. Dans la suite, de tels melons sont qualifiés « conformes ».
Le détaillant achète ses melons auprès d'un maraîcher chez lequel, la masse en gramme des melons est modélisée par une variable aléatoire M_A qui suit une loi uniforme continue sur l'intervalle $[850\ ;\ x]$, où x est un nombre réel supérieur à 1 200.

1. Le détaillant constate que 75 % des melons du maraîcher sont conformes. Déterminer x.
2. En déduire la masse moyenne d'un melon du maraîcher.

1) $P(900 \leq M_A \leq 1200) = \dfrac{1200-900}{x-850} = 0{,}75$

équivaut à $0{,}75(x-850) = 300$

équivaut à $x - 850 = 300 \times \dfrac{4}{3} = 400$

équivaut à $x = 1250$

2) $E(M_A) = \dfrac{850+1250}{2} = \dfrac{2100}{2} = 1050$

Capacité 7 *Utiliser une loi exponentielle*

La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,3$.

1. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X \leqslant 1)$, $\mathbb{P}(X > 2)$ et $\mathbb{P}_{X>1}(X > 2)$.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

1) $P(X \leq 1) = 1 - e^{-\lambda \times 1} = 1 - e^{-0,3}$

$P(X > 2) = e^{-2\lambda} = e^{-0,6}$

$P_{(X>1)}(X > 2) = P(X > 2-1) = P(X > 1) = e^{-\lambda}$

par propriété
de loi sans mémoire

2) $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ $\quad V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ $\quad \sigma(X) = \dfrac{1}{X}$

Capacité 8 ***Utiliser une loi exponentielle***

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans une usine, est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).

1. Démontrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{P}(T \leqslant t) = 1$.
2. On suppose que $\mathbb{P}(T \leqslant 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.
3. Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.
   a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
   Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.
   b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
   Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.
   c. Déterminer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
   Interpréter ce résultat.

1) Pour tout $t \geq 0$: $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

$\lambda > 0$ donc par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\lambda t} = 0$

puis par somme :

$\lim\limits_{t\to+\infty} 1 - e^{-\lambda t} = 1$

On en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} P(T \leq t) = 1$

2) $P(T \leq 7) = 1 - e^{-7\lambda} = 0,5$

$1 - e^{-7\lambda} = 0,5$ équivaut à $e^{-7\lambda} = 0,5$

équivaut à $-7\lambda = \ln(0,5)$

$1 - e^{-7\lambda} = 0,5$ équivaut à $\lambda = \dfrac{\ln(0,5)}{-7} \simeq 0,099$

3)

a) $P(T \geq 5) = e^{-\lambda \times 5} = e^{-0{,}099 \times 5}$

$P(T \geq 5) \simeq 0{,}61$

b) $P_{(T \geq 2)}(T \geq 7) = P(T \geq 7-2)$

par propriété de loi sans mémoire.

c) $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}099} \simeq 10{,}10$

E(T) s'interprète comme la durée de vie moyenne en années d'un composant.