Correction du thème 1 : limites de suite

Énoncé

Un magazine est vendu uniquement par abonnement. On a constaté que :

- il y a 1 800 nouveaux abonnés chaque année ;
- d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas.
  En 2008, il y avait 8 000 abonnés.

Question 1

Si u_n désigne le nombre de milliers d'abonnés en $(2008+n)$, cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel (n) :

$$u_{n+1} = (1 - 15/100)u_n + 1,8 = 0,85u_n + 1,8$$

Question 2

Construire les quatre premiers termes de la suite u_n sur l'axe des abscisses en appliquant l'algorithme suivant :

- **Étape 1 :** on place $u_0 = 8$ sur l'axe des abscisses ;
- **Étape 2 :** on construit l'ordonnée $u_1 = 0,85u0 + 1,8$ du point de D d'abscisse u_0 sur l'axe des ordonnées et on le projette sur l'axe des abscisses en prenant l'abscisse du point de la droite Δ dont il est l'ordonnée, puis on reprend l'étape 1 avec u_1

Question 2

graphique

Question 3 a)

[graphique]

Question 3 b)

```
def liste_valeurs(n):
        u = 8
        L = []
        L.append(u)
        for k in range(n - 1):
                u = 1.85 * u + 1.8
                L.append(u)
        return L
```

Question 4

On peut conjecturer que la suite u_n est croissante et converge vers 12.

Question 5 a)

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 12$.

Pour tout entier naturel n :

- $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0,85u_n + 1,8 - 12$
- donc $v_{n+1} = 0,85u_n - 10,2$
- donc $v_{n+1} = 0,85(u_n - 12)$
- donc $v_{n+1} = 0,85v_n$

On peut conclure que la suite v_n est géométrique de raison $0,85$.

Question 5 b)

La suite (v_n) est géométrique de raison $0,85$, donc pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n = (u_0 - 12) \times 0,85^n = -4 \times 0,85^n$$

Question 5 c)

Pour tout entier naturel n, on a $v_n = 0,85^n$ et $u_n = v_n + 12$ donc :

$u_n = 12 - 4 \times 0,85^n$

Question 6

- Pour tout entier naturel n, on a $u_n = 12 - 4 \times 0,85^n$.
- Or $|0,85| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -4 \times 0,85^n = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} 12 - 4 \times 0,85^n = 12$
- Enfin, pour tout entier naturel n, on a :
  $u_{n+1} - u_n = -4 \times 0,85^n(0,85 - 1) = 0,60 \times 85^n \geqslant 0$
  On en déduit que la suite (u_n) est croissante.