Histoire 1

- Archimède (vers 287−212 avant JC) est un mathématicien, physicien et inventeur de langue grecque qui vécut à Syracuse en Sicile. Dans *La méthode*, il démontre que l'aire $\mathscr{A}$ d'un disque est égale à l'aire $\mathscr{T}$ d'un triangle rectangle de hauteur le rayon R et de base la circonférence $2\pi R$. Il examine tous les cas possibles (méthode d'exhaustion) et prouve par l'absurde qu'on ne peut avoir ni $\mathscr{A} > \mathscr{T}$, ni $\mathscr{A} < \mathscr{T}$. Il s'appuie sur un axiome de continuité « *En la divisant successivement par* 2, *on peut rendre une quantité aussi petite que l'on veut* » et encadre l'aire du disque par celles de polygones inscrits et exinscrits avec un nombre croissants de côtés. Il obtient ainsi un encadrement de π remarquable pour l'époque $3+\frac{10}{71} < \pi < 3+\frac{1}{7}$. Ce principe sera repris bien plus tard pour approcher les nombres irrationnels par des suites.

- Héron d'Alexandrie (vers 170 – 117 avant JC) est un physicien et mathématicien grec, célèbre pour sa formule de l'aire d'un triangle de côtés a, b et c en fonction de son demi-périmètre p : $\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Son nom est associé à un algorithme d'approximation de $\sqrt{2}$, connu des Babyloniens 400 ans avant, noté actuellement sous la forme de la suite $r_0 = 2$ et $r_{n+1} = \frac{1}{2}\left(r_n + \frac{2}{r_n}\right)$.

- Léonard de Pise, dit Fibonacci (1175 – 1240) est un mathématicien italien auteur du *Liber abaci* (1202), un recueil de problèmes algébriques, où il popularisa l'usage des chiffres arabes. Un énoncé est resté célèbre : « *Possédant au départ un couple de lapins, combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence?* », il se modélise avec la suite $f_0 = f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. On démontre que le rapport f_{n+1}/f_n tend vers le nombre d'Or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1 Suite numérique

Définition 1

Une suite est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
Si u est le nom de la suite, l'image de n par u se note $u(n)$ (notation fonctionnelle) ou de manière plus usuelle u_n (notation indicielle).
L'ensemble des termes de la suite se note alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2

Une suite permet de modéliser l'évolution d'une grandeur qu'on peut indexer sur des entiers (jours, mois, années …), on parle de **modèle discret**.

Capacité 1 *Modéliser une situation par une suite*

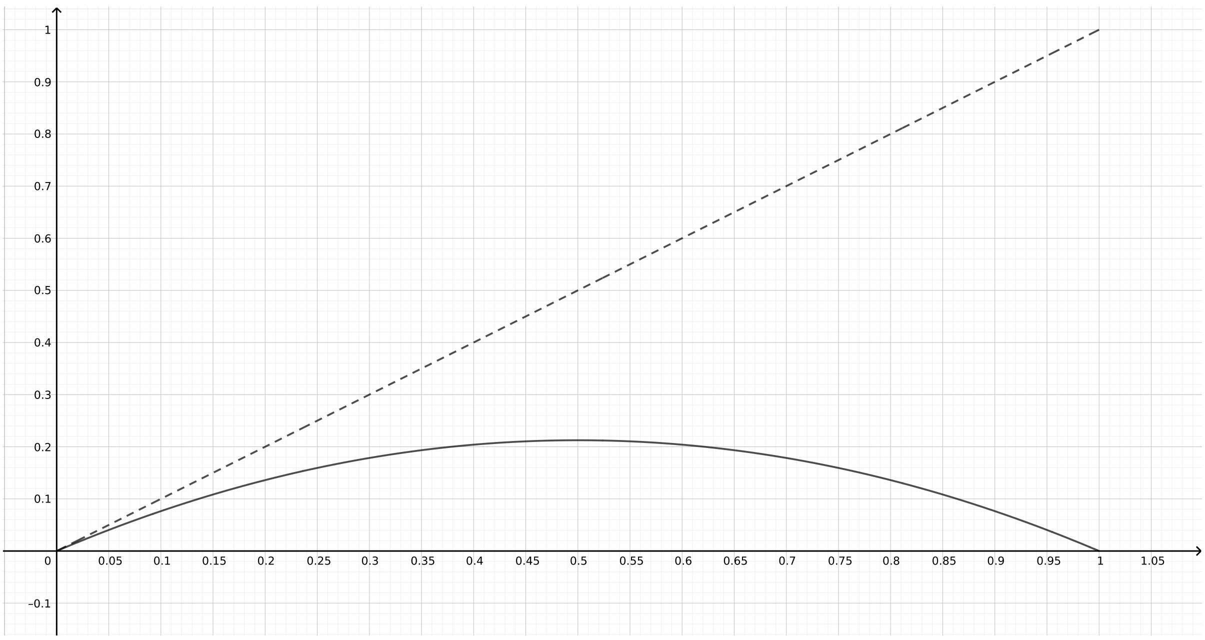
On s'intéresse à une population de phoques vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.
Au début de l'an 2000, on comptait 500 phoques. Une étude a permis de modéliser ce nombre de phoques par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = 0,85u_n(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de phoques, en milliers, au début de l'année $2000+n$.
Dans les calculs, on arrondira les nombres de phoques à l'unité.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de phoques au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.

2. On a représenté sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f : x \mapsto 0,85x(1-x)$ et la droite Δ d'équation $y = x$.



   Construire les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses en appliquant l'algorithme suivant :

   - Étape 1 : on place $u_0 = 0,5$ sur l'axe des abscisses ;
   - Étape 2 : on construit l'ordonnée $u_1 = f(u_0)$ du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse u_0 sur l'axe des ordonnées et on le projette sur l'axe des abscisses en prenant l'abscisse du point de la droite Δ dont il est l'ordonnée, puis on reprend l'étape 1 avec u_1 ;

3. **a.** Calculer des valeurs approchées des dix premiers termes de la suite (u_n) avec le mode suite de sa calculatrice.

   b. Reporter les premiers termes dans la capture de feuille de tableur ci-dessous. Quelle formule faudrait-il saisir en `A3` et `B3` pour compléter la feuille de calcul ?

	A	B
1	n	u_n
2	0	0,5
3	1	...
4	2	...
5	3	...

c. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie une liste avec les n premiers termes de la suite (u_n) :

```
def liste_valeurs(n):
    u = 0.5
    L = [u]
    for k in range(n - 1):
        u = ........
        L.append(........)
    return ......
```

4. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la limite de la suite (u_n) ?

En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

2 Suites et ordre

2.1 Ordre et opérations

Propriété 1

Soit x, y et z des réels.

- Pour tous réels x, y et z, si $x \leqslant y$ alors $x+z \leqslant y+z$.
- Pour tous réels x, y et z, si $x \leqslant y$ et $z>0$ alors $xz \leqslant yz$, et si $x<y$ et $z>0$ alors $xz<yz$
- Pour tous réels x, y et z, si $x \leqslant y$ et $z<0$ alors $xz \geqslant yz$ et si $x<y$ et $z<0$ alors $xz>yz$
- Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$.

2.2 Méthode de la différence

Propriété 2

Comparer deux nombres x et y revient à étudier le signe de leur différence.

- $x>y \Longleftrightarrow x-y>0$
- $x \leqslant y \Longleftrightarrow x-y \leqslant 0$

Capacité 2 *Utiliser la méthode du signe de la différence*

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_0 = 99$ et $u_{n+1} = u_n - n^2 + 2n + 8$.
Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire l'étude des variations de la suite (u_n).

2.3 Ordre et fonctions de référence

Propriété 3

1. Fonction carré $x \longmapsto x^2$

Si $0 \leqslant a < b$ alors $0 \leqslant a^2 < b^2$ et si $a < b \leqslant 0$ alors $a^2 > b^2 \geqslant 0$

2. Fonction racine carré $x \longmapsto \sqrt{x}$

Si $0 \leqslant a < b$ alors $0 \leqslant \sqrt{a} < \sqrt{b}$ ou *deux nombres positifs (les racines) sont rangés dans le même ordre que leurs carrés*

3. Fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

Si $0 < a < b$ alors $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$ et si $a < b < 0$ alors $0 > \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

4. Fonction exponentielle $x \longmapsto \mathrm{e}^x$.

$a < b \Leftrightarrow \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ et $a < b \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-a} > \mathrm{e}^{-b}$

5. *Échelle des puissances.*

- Pour tout réel x tel que $0 < x < 1$ on a $0 < x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < 1$.
- Pour tout réel x tel que $1 < x$ on a $1 < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3$.
- Pour tout entier $n \geqslant 1$:
  - Si $0 < x < 1$ alors $0 < x^n \leqslant x < 1$.
  - Si $1 < x$ alors $1 < x \leqslant x^n$.

Capacité 3 *Manipuler des encadrements*

1. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a : $\mathrm{e}^{-n} \leqslant 1$.

2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-n}} < 1$$

2.4 Opérations membre à membre

Propriété 4

Soient a, b, c et d quatre réels.

Si	a	$\leqslant$	b		Si	0	$\leqslant$	a	$\leqslant$	b
et	c	$\leqslant$	d		et	0	$\leqslant$	c	$\leqslant$	d
alors	$a+c$	$\leqslant$	$b+d$		alors	0	$\leqslant$	$a\times c$	$\leqslant$	$b\times d$

2.5 Étude du sens de variation d'une suite

Définition 3

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **constante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} = u_n$.

Méthode

Il existe plusieurs méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n). On utilisera principalement les deux méthodes suivantes.

☞ Si le terme général de (u_n) est donné par une formule explicite $u_n = f(n)$ et s'il existe un entier naturel p tel que f monotone sur $[p\,;+\infty[$ alors :

- (u_n) est décroissante à partir du rang p si f décroissante sur $[p\,;+\infty[$.
- (u_n) est croissante à partir du rang p si f croissante sur $[p\,;+\infty[$.

☞ On peut étudier le **signe de la différence** $u_{n+1} - u_n$ et démontrer qu'il existe un rang p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n$ est de signe constant.

- Si « $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ » alors (u_n) est décroissante à partir du rang p.
- Si « $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ » alors (u_n) est croissante à partir du rang p.

Capacité 4 ***Choisir une méthode adaptée pour étudier le sens de variation d'une suite***

1. $\boxed{\textbf{Méthode 1}}$: *Si $u_n = f(n)$, étudier les variations de f sur* $[0\,;+\infty[$

   Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$, par $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n+1}$.

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$. On a pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = f(n)$.

   ☞ Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $f'(x)$.
   ATTENTION, on peut dériver la fonction f mais pas la suite (u_n) car celle-ci n'est pas définie sur un intervalle !!!

   ☞ En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$ et le sens de variation de (u_n).

2. **Méthode 2** : *Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$*

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n(1-2u_n)$.

- ☞ Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- ☞ Conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).

3 Suites arithmétiques et géométriques

3.1 Suites arithmétiques

Les preuves des propriétés ont été établies en classe de première

Définition 4

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est la raison de la suite.

Propriété 5

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + n \times r$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \quad u_p = u_q + (p-q) \times r$$

Théorème 1

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement s'il existe deux réels a et r tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a + nr$$

Une suite est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique dans un repère est constituée de points alignés.

Propriété 6

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $q \in \mathbb{N}$ tel que $q \geqslant p$ on a :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{q-1} + u_q = (q-p+1) \times \frac{u_p + u_q}{2} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

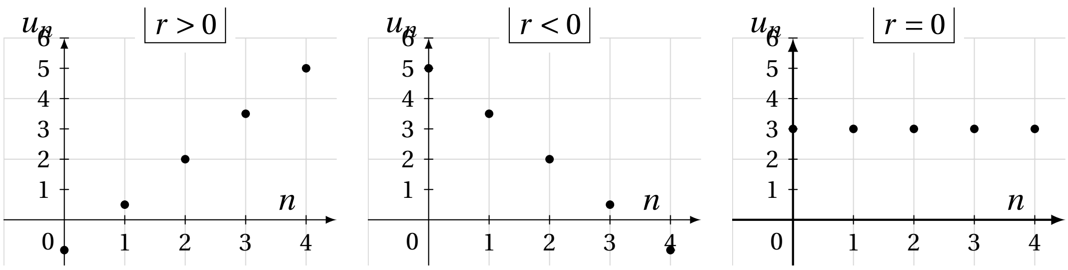
En particulier pour la suite arithmétique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Propriété 7 ***Sens de variation***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

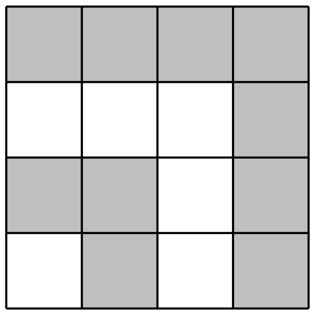
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $r > 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $r < 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si $r = 0$.



Capacité 5 ***Étudier une suite arithmétique***

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ des entiers impairs successifs :

$$u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 5, \ldots$$



1. Justifier que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmétique.
2. Soit n un entier naturel positif, exprimer u_n en fonction de n.
3. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} u_k = n^2$.

3.2 Suites géométriques

Les preuves des propriétés ont été établies en classe de première

Définition 5

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est la raison de la suite.

Propriété 8

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad u_m = u_p \times q^{m-p}$$

Propriété 9

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Plus généralement, Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geqslant p$ on a :

$$\sum_{k=p}^{m} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{m-1} + u_m = u_p \times \frac{1-q^{m-p+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-raison^{\text{nombre de termes}}}{1-raison}$$

En particulier pour la suite géométrique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n$ avec $q \neq 1$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Propriété 10 ***Sens de variation***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- **Premier cas** $\boxed{u_0 > 0}$.

  Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $\boxed{1 < q}$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $\boxed{0 < q < 1}$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1 si $q = 0$ et à partir du rang 0 si $q = 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone si $\boxed{q < 0}$

- **Deuxième cas** $\boxed{u_0 > 0}$.

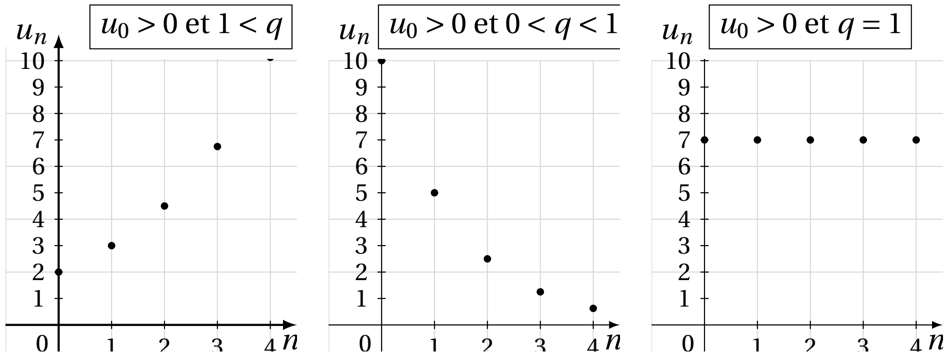
  La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n$ est géométrique de même raison q et de premier terme $v_0 > 0$.

  On applique la propriété précédente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on en déduit par symétrie le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $\boxed{1 < q}$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $\boxed{0 < q < 1}$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1 si $q = 0$ et à partir du rang 0 si $q = 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone si $\boxed{q < 0}$

Les différents cas exposés ci-dessus sont compliqués à retenir. En pratique, la propriété peut se résumer ainsi :

- Si la raison q de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
- Si la raison q de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et son sens de variation est fixé par la comparaison de deux termes consécutifs comme u_0 et u_1.



Capacité 6 *Étudier une suite géométrique*

Un globe-trotter a comme objectif de parcourir 200 km à pied. Il peut parcourir 40 km en une journée, mais, la fatigue s'accumulant, la distance qu'il parcourt diminue de 3 % chaque nouvelle journée.
On note la distance D_n la distance parcourue durant le n-ième jour.
Le premier jour de son périple, il parcourt donc $D_1 = 40km$.

1. Calculer la distance parcourue le deuxième jour.
2. Quelle est la nature de la suite (D_n) ? Donnez ses éléments caractéristiques.
3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, déterminer l'expression de D_n en fonction de n.
4. Pour calculer le nombre de jours qu'il faudra au globe-trotter pour atteindre son objectif, on a écrit la fonction Python suivante :

```
def nb_jours():
    j = 1
    u = 40
    S = 40
    while ....... :
        u = 0.97 * u
        S = S + u
        j = ......
    return j
```

   Compléter les deux lignes incomplètes de cette fonction.

5. Déterminer une expression en fonction de n de la distance totale T_n parcourue au bout de n jours :

$$T_n = D_1 + D_2 + \ldots + D_n$$

6. Réaliser un tableau de valeurs de T_n avec le mode suite de sa calculatrice et en déduire le nombre de jours qu'il qu'il faudra au globe-trotter pour atteindre son objectif.

Table des matières