Histoire 1

Inscrit à 18 ans à l'Université de Cambridge, Isaac Newton doit rentrer se confiner au manoir familial lorsque la peste se déclare quatre ans plus tard. En 1665 et 1666, il profite de son inactivité pour inventer l'essentiel des mathématiques et de la physique moderne au cours de son *année miraculeuse* : la théorie de l'optique, la méthode des fluxions, la théorie des couleurs et les prémices de la théorie de la gravitation universelle ! Dans son ouvrage posthume (1740) « La méthode des fluxions » il distingue deux classes de problèmes :

- Problème I : « *étant donnée la relation des quantités fluentes (y et x), trouver la relation de leurs fluxions ($\mathring{x} = dx$ et $\mathring{y} = dy$)* », il s'agit d'un problème de dérivation en langage moderne.
- Problème II : « *Étant donnée la relation des fluxions, trouver celle des quantités fluentes* ». La relation des fluxions, est une relation faisant intervenir des fonctions et leurs dérivées, autrement dit, une équation différentielle en langage moderne. Par exemple il peut s'agir de déterminer la trajectoire d'un objet à partir de sa position initiale et de la loi de sa vitesse.

Source : *Bernard Ycart :* https://hist-math.fr/newtona-auto#.

1 Rappels sur les équations différentielles linéaires

1.1 Équation différentielle

Définition 1

- Une **équation différentielle** est une équation définie sur un intervalle I où l'inconnue est une fonction dérivable sur I et où interviennent des dérivées de cette fonction.
- **Résoudre** une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble des fonctions solutions de l'équation.
- Une convention usuelle est de noter y la fonction inconnue d'une équation différentielle et y', y'' etc ... ses dérivées successives.

  De plus dans l'écriture d'une équation différentielle, on omet généralement x pour les fonctions y et y'. Ainsi l'équation définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par $y'(x) = 2y(x) + x - 1$ peut s'écrire $y' = 2y + x - 1$.

Capacité 1 ***Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle***

Pour toute fonction y dérivable sur $]0\,;+\infty[$ on définit l'équation différentielle :

$$xy' - y = x$$

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, telle que pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) = x(\ln(x) - 3)$$

1. Soit x réel strictement positif, déterminer une expression de $f'(x)$.

2. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle (E).

2 Équations différentielles $y' = ay + b$

2.1 Équations différentielles $y' = ay$

Théorème 1

Soit a un réel non nul.
L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réelle.

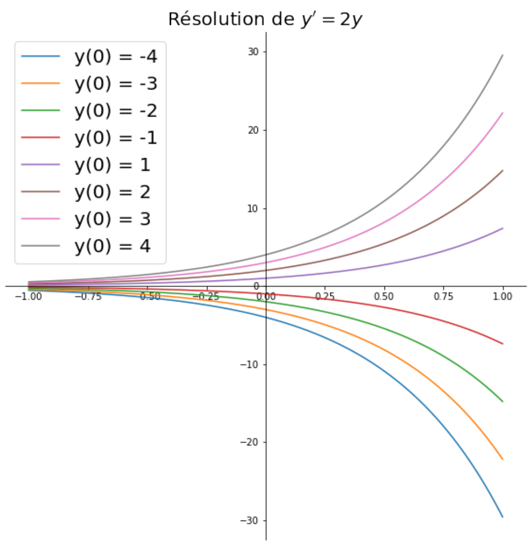
Remarque 1

- Pour un réel a non nul fixé, il existe une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$.

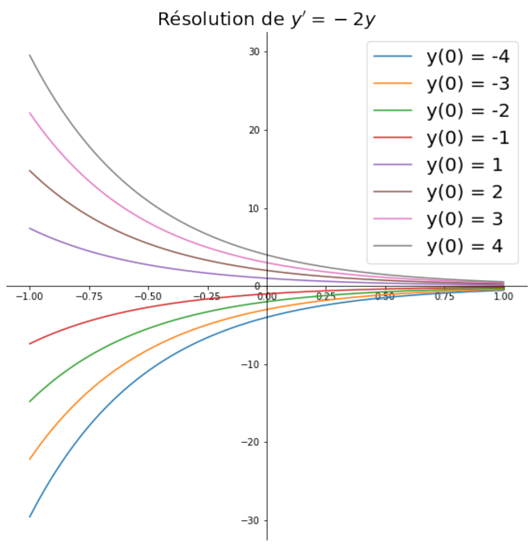
  Les courbes de ces solutions sont appelées *courbes intégrales*.

- Pour un réel a non nul fixé et un couple de valeurs initiales (x_0, y_0) fixé, il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = ay$ telle que $y(x_0) = y_0$.

Courbes intégrales de $y' = ay$ avec $a > 0$



Courbes intégrales de $y' = ay$ avec $a < 0$



Capacité 2 ***Résoudre une équation différentielle $y' = ay$ ⇒ exo 9 p.125***

Soit (E) l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $y' - 6y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 3$.

2.2 Équations différentielles $y' = ay + b$

Définition 2

Soit a (avec $a \neq 0$) et b deux constantes réelles.
L'équation différentielle définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par $y' = ay + b$ est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants**.

Propriété 1

Soit a (avec $a \neq 0$) et b deux constantes réelles .
Une solution particulière de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = ay + b$ est la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{b}{a}$.

Démonstration

- Hypothèses : Soit a (avec $a \neq 0$) et b deux constantes réelles et soit l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $y' = ay + b$. On considère la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{b}{a}$.
- Raisonnement :

  ....

  ....

- Conclusion :

  La fonction constante g est une solution particulière de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Théorème 2 *admis*

Soit a (avec $a \neq 0$) et b deux constantes réelles.

1. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $(E) : y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f_0(x) + g(x)$ où f_0 est une solution quelconque de l'équation différentielle $(E_0) : y' = ay$ et g une solution particulière de l'équation (E).
2. Plus précisément, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec C une constante réelle.

Capacité 3 ***Résoudre une équation différentielle $y' = ay + b \Rightarrow$ exo 10 p.125***

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ 10v'(t) + v(t) = 30$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. On suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$. En déduire l'expression de la fonction v.

3 Équation différentielle $y' = f$ et primitives d'une fonction

3.1 Équation différentielle $y' = f$ et primitive d'une fonction

Définition 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Les définitions suivantes sont équivalentes :

- ☞ Toute fonction y, qui est solution de l'équation différentielle $y' = f$ avec y dérivable sur I, est une **primitive** de la fonction f.
- ☞ Une fonction F dérivable sur I, telle que pour tout réel $x \in$ I, on a $F'(x) = f(x) =$, est une **primitive** de la fonction f.

Capacité 4 ***Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle $y' = f \Rightarrow$ exo 1 p. 121***

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
   - **a.** Vérifier que la fonction F définie sur R par $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 1$ est une primitive de f.
   - **b.** Déterminer d'autres primitives de la f.
2. Compléter le tableau de primitives :

Fonction f	Intervalle I	Une primitive F parmi une infinité ...
$f(x) = 1$	$\mathbb{R}$	....
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	....
$f(x) = 3x - 2$	$\mathbb{R}$	....
$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$	....
$f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$	$\mathbb{R}$	....

3.2 Propriété des primitives

Propriété 2

1. Toute fonction f continue sur un intervalle I, admet des primitives sur I.
2. Si f est une fonction continue sur un intervalle I et F est une primitive de f, alors la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ avec k constante réelle, est aussi une primitive de f.
3. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
4. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

   Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

   Autrement dit l'équation différentielle $y' = f$ possède une unique fonction solution F définie et dérivable sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration *Au programme*

1. L'existence d'une primitive pour une fonction f continue sur un intervalle I, sera démontrée dans le chapitre sur le calcul intégral.
2. - Hypothèses : f est une fonction continue sur un intervalle I, F est une primitive de f et G est définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ avec k constante réelle.
   - Raisonnement :

     ....

     ....

     ....

     ....

   - Conclusion : G est une primitive de f.
3. - Hypothèses : f est une fonction continue sur un intervalle I, F et G sont deux primitives de f.
   - Raisonnement :

     ....

. . . .

. . . .

. . . .

- Conclusion : Il existe une constante réelle k telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $F(x) - G(x) = k$.

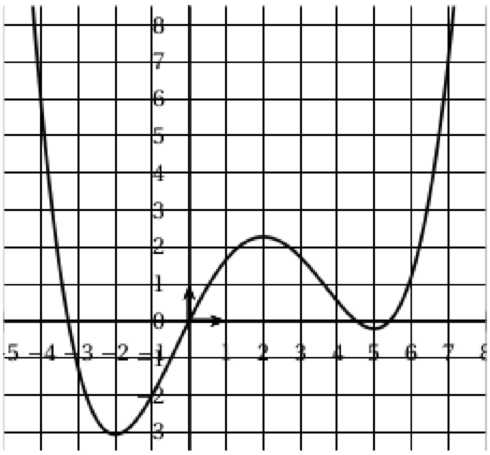
Capacité 5 ***Vérifier qu'une fonction est un primitive d'une autre fonction ⇒ exo 3 p.123***

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;4]$ par $f(x) = (3,6x+2,4)\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4$.

1. Vérifier que la fonction que la fonction F définie par $F(x) = (-6x-14)\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4x$ est une primitive de f.
2. Déterminer la solution sur $[0;4]$ de l'équation différentielle $y' = f$ qui vérifie $y(0) = 10$.

Capacité 6 ***Échelle des dérivées***

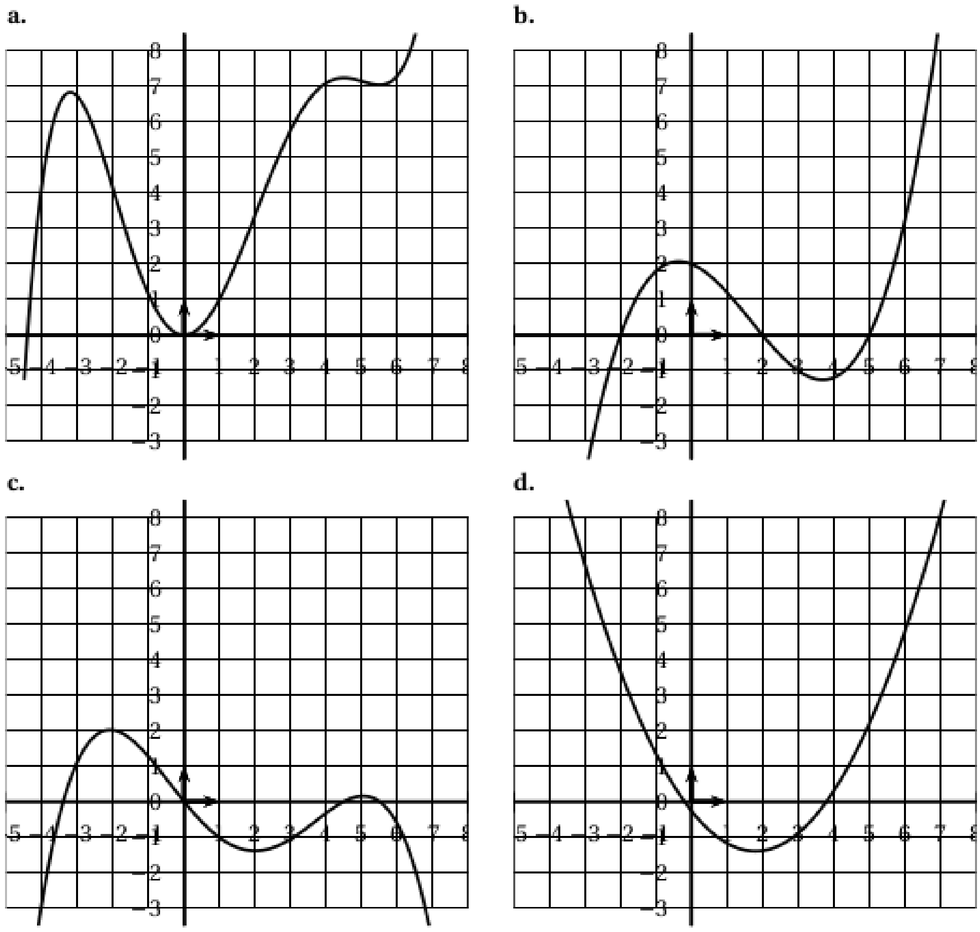
On considère la courbe d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.



Pour chaque question, sélectionner la ou les bonne(s) réponse(s).

1. Soit f' la dérivée de f et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

- (A_1) : f' est positive sur $[2 ; 4]$.
- (A_2) : f' est négative sur $[-4,5 ; -4]$
- (A_3) : F est décroissante sur $[2 ; 4]$.
- (A_4) : F est décroissante sur $[-3 ; -1]$.



2. Une des courbes ci-dessus représente la fonction f''. Laquelle ?

3.3 Recherche de primitives

3.3.1 Tableau des primitives des fonctions usuelles

Le tableau 3.3.1 de la présente page donne, pour chaque fonction f de référence, les fonctions primitives F sur l'intervalle considéré, il s'obtient à partir du tableau des dérivées en vérifiant que $F' = f$.

Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F ($C \in \mathbb{R}$ constante)	Intervalle I
$f(x) = m$ (constante)	$F(x) = mx + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
Plus généralement : $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$ (si $n \geqslant 0$) $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ (si $n < -1$)
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$ (pour $x > 0$)	$F(x) = \ln(x) + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$ (pour $x < 0$)	$F(x) = \ln(-x) + C$	$]-\infty; 0[$
$f(x) = \frac{1}{x}$ (pour $x \neq 0$)	$F(x) = \ln(\lvert x \rvert) + C$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \mathrm{e}^x$ (exponentielle de base e)	$F(x) = \mathrm{e}^x + C$	$\mathbb{R}$

Capacité 7 ***Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence*** $\Rightarrow$ ***exo 5 p.123***

1. Pour chacune des fonctions f suivantes, continue sur I, déterminer l'ensemble des primitives de f sur $]0; +\infty[$.

a. $f(x) = 4$ sur $I = \mathbb{R}$;

b. $f(x) = 0$ sur $I = \mathbb{R}$;

c. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0; +\infty[$;

d. $f(x) = 3 + x + x^4$ sur $I = \mathbb{R}$;

e. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$;

f. $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ sur $I = \mathbb{R}$;

g. $f(x) = \frac{-1}{x}$ sur $I =]-\infty; 0[$.

2. Démontrer que la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F : x \mapsto x \ln x - x + 1$ est une primitive de la fonction ln. Déterminer la primitive de la fonction ln qui s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$.

3.3.2 Tableau d'opérations sur les primitives

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On a alors les propriétés résumées dans le tableau 3.3.2 de la présente page. Là encore, les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

Opérations sur les primitives

Conditions	f s'écrivant sous la forme	admet comme primitive F (à une constante C près)
Pour tout $x \in \mathrm{I}$	$u' + v'$	$u + v + C$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante	$\lambda u'$	$\lambda u + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$	$u' u$	$\frac{1}{2} u^2 + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$ et tout $n \in \mathbb{N}$	$u' u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \neq 0$	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \neq 0$	$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert) + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$	$u' \mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + C$

Remarque 2

La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ mais on ne peut pas donner de forme explicite de celles-ci.

Capacité 8 ***Calculer une primitive de fonction de la forme*** $(v' \circ u) \times u'$ $\Rightarrow$ ***exo 6 p.123***

Pour chacune des fonctions f suivantes, continues sur un intervalle I, déterminer l'ensemble des primitives de f sur I.

1. $f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \mathrm{e}^x$ sur $\mathrm{I} =]0\,;\,+\infty[$;
2. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;
3. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;
4. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;
5. $f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$;
6. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur $\mathrm{I} =]0\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$;

3.4 Thème du programme : modèle d'évolution

Thème 1 ***Loi de refroidissement de Newton***

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Partie A : modèle discret

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$$

où k est une constante réelle.
Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.
   - **a.** Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
   - **b.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
   - **c.** Déterminer la limite de la suite (T_n).
4. On considère la fonction Python suivante :

Tant que $T \geqslant 40$ $\quad T \leftarrow 0,8T + 2$ $\quad n \leftarrow n + 1$ Fin Tant que

```
def seuil(s):
    t = 80
    n = 0
    while ............ :
        t = ............
        n = ............
    return n
```

   - **a.** Quelle valeur numérique est renvoyée par `seuil(40)` ?
   - **b.** Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Partie B : modèle continu

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'équation différentielle (E_M) :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et solution de l'équation différentielle (E_0).

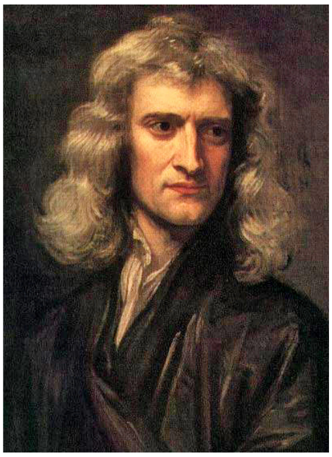
$$\theta'(t) = -0,2\theta(t)$$

Déterminer la fonction θ solution particulière de l'équation différentielle (E_0) vérifiant la condition initiale $\theta(0) = 80$.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$.

a. Déterminer la fonction g solution particulière de l'équation différentielle (E_{10}) vérifiant la condition initiale $g(0) = 80$.

b. Une personne aime boire son café à 40 °C.
Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$.
Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.



Isaac Newton (1642 -1727)

Au commencement de l'année 1665, je trouvai la méthode des séries approximantes, et la règle pour réduire n'importe quelle puissance d'un binôme en une telle série. La même année en mai, je trouvai la méthode des tangentes de Gregory et Slusius, et en novembre j'eus la méthode directe des fluxions,et l'année suivante en janvier j'eus la théorie des couleurs, et en mai suivant j'eus accès à la méthode inverse des fluxions. Et la même année je commençai à penser à la gravité étendue à l'orbite de la lune.

Table des matières