1 Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux

1.1 Schéma de Bernoulli

Définition 1

On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p la répétition de n épreuves de Bernoulli (avec $n \geqslant 1$) de paramètre p (avec $0 \leqslant p \leqslant 1$) identiques dans des conditions d'indépendance (c'est à dire que l'issue d'une épreuve ne dépend pas des issues des autres épreuves).

Capacité 1 ***Identifier une schéma de Bernoulli***

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, déterminer si elle peut être modélisée par un schéma de Bernoulli et si oui, préciser ses paramètres.

1. Expérience aléatoire : On lance dix fois une pièce équilibrée et on compte le nombre de « Face » obtenues

   C'est / ce n'est pas un schéma de Bernoulli :

   - épreuve de Bernoulli : lancer d'une pièce équilibrée avec une probabilité de succès $\boxed{p = \dots}$.
   - nombre de répétitions : : $\boxed{n = \dots}$.
   - épreuves indépendantes : *oui / non*

2. Expérience aléatoire : On tire trois fois et avec remise une boule dans une urne contenant 10 noires et 7 boules rouges et on note le nombre de boules rouges obtenues.

   C'est / ce n'est pas un schéma de Bernoulli :

   - épreuve de Bernoulli : tirage d'une boule rouge dans une urne avec une probabilité de succès $\boxed{p = \dots}$.
   - nombre de répétitions : : $\boxed{n = \dots}$.
   - épreuves indépendantes : *oui / non*

3. Expérience aléatoire : On tire trois fois et sans remise une boule dans une urne contenant 10 noires et 7 boules rouges et on note le nombre de boules rouges obtenues.

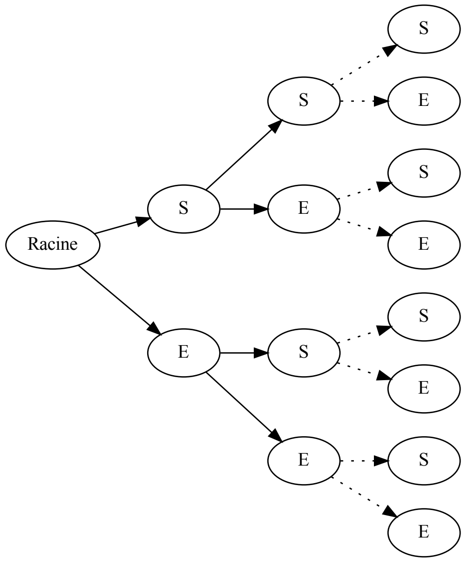
   C'est / ce n'est pas un schéma de Bernoulli :

   - épreuve de Bernoulli : tirage d'une boule rouge dans une urne avec une probabilité de succès $\boxed{p = \dots}$.
   - nombre de répétitions : : $\boxed{n = \dots}$.
   - épreuves indépendantes :*oui / non*

1.2 Coefficients binomiaux

Définition 2

Un **schéma de Bernoulli** avec n (avec n entier naturel non nul) épreuves de *Bernoulli* identiques et indépendantes peut être représenté par un arbre :



Le **nombre de chemins** dans l'arbre (de la racine jusqu'à une feuille) comportant exactement k **succès** et $n-k$ **échecs** est égal au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, on l'appelle **coefficient binomial** k **parmi** n et on le note $\boxed{\binom{n}{k}}$.

Propriété 1

Soit un entier naturel n et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

- $\binom{0}{0} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ***Propriété de symétrie***

2 Loi binomiale

2.1 Loi du nombre de succès

Définition 3

Soit un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p et soit X la variable aléatoire qui à une liste de n résultats $\left(\text{comme } \left(S, \overline{S}, \overline{S}, \cdots, S\right)\right)$ associe le nombre de succès dans cette liste.
On dit que X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

2.2 Loi de probabilité d'une loi binomiale

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ avec n entier non nul et p réel entre 0 et 1.
Pour tout entier $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ on peut exprimer $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ en fonction de du nombre de chemins réalisant k succès soit $\binom{n}{k}$ et de la probabilité d'un tel chemin soit $p^k(1-p)^{n-k}$:

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

Méthode ***Fonctions préprogrammées de la calculatrice ou du tableur, voir manuel Indice p.372 et p.373***

	Menu	$\mathrm{P}(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{k})$	$\mathrm{P}(\boldsymbol{X}\leqslant \boldsymbol{k})$
Casio	Touche **MENU** puis **STAT** puis **DIST**, puis **BINM**	Choisir **Bpd** et **Var** puis saisir les paramètres	Choisir **Bcd** et **Var** puis saisir les paramètres
Texas	Menu **Distrib** (2nde var) puis **binomFdp**, ou **binomFRep**	**binomFdp(n,p,k)**	**binomFrép(n,p,k)**
Numworks	Menu **Calculs** puis **Probabilités** dans la **Boîte à outils**	**binompdf(k, n, p)**	**binomcdf(k, n, p)**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,0,3)$, si on utilise le tableur `Calc` de `LibreOffice` :

- pour calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}=2)$ dans une cellule, on saisit `=LOI.BINOMIALE(2;10;0,3;0)`
- pour calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}\leqslant 2)$ dans une cellule, on saisit `=LOI.BINOMIALE(2;10;0,3;1)`
- pour calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant 2)$, on passe à l'événement contraire et $\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant 2)=\mathbb{P}(\mathrm{X}>1)=1-\mathbb{P}(\mathrm{X}\leqslant 1)$.

Capacité 2 ***Calculer des probabilités pour une loi binomiale***

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,3$.
Calculer des valeurs approchées des probabilités ci-dessous, avec les fonctions préprogrammées de la calculatrice.

1. $\mathbb{P}(X=3)$
2. $\mathbb{P}(X\leqslant 3)$
3. $\mathbb{P}(X\leqslant 4)$
4. $\mathbb{P}(X\geqslant 4)$
5. $\mathbb{P}(4\leqslant X\leqslant 8)$
6. $\mathbb{P}((X\leqslant 4)\cup(8\leqslant X))$

2.3 Modéliser une situation par une loi binomiale

Capacité 3 ***Modéliser une situation par une loi binomiale***

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que la probabilité qu'un casque de cette marque choisi au hasard présente un défaut est de $0,036$.
On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n=35$.
   a. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,\ p)$ où $n=35$ et $p=0,036$.
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception. Donner une valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près.
   c. Calculer la probabilité qu'exactement trois casques présentent un défaut. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près en indiquant la méthode de calcul.
   d. Calculer la probabilité qu'au moins un des 35 casques présente un défaut. Donner une valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près.
2. Dans cette question, n n'est pas fixé.

   Déterminer le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieure à $0,99$.

2.4 Espérance, variance et écart-type d'une loi binomiale

Propriété 3

Soit n un entier naturel non nul et p un réel entre 0 et 1.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ de paramètres n et p.

1. L'espérance de X est $\boxed{\mathbb{E}(X)=np}$.
2. La variance de X est $\boxed{\mathbb{V}(X)=np(1-p)}$.
3. L'écart-type de X est $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}}$.

Capacité 4 ***Utiliser l'espérance d'une loi binomiale***

Sur une ligne aérienne, une compagnie affrète un appareil de 200 places et vend 202 réservations par vol. On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n=202$ et $p=0,971$.

1. Déterminer le nombre moyen de passagers par vol.
2. Calculer la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement.

3. Calculer la probabilité qu'un seul client parmi les 202 qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement.

4. En déduire la probabilité que la compagnie se trouve en situation de surréservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).

3 Loi géométrique

3.1 Loi discrète du temps d'attente

Définition 4

On répète de façon indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p > 0$.
La variable aléatoire X qui renvoie le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès, suit une **loi géométrique de paramètre** p.

Propriété 4 ***Loi de probabilité d'une loi géométrique***

Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi géométrique de paramètre** p **tel que** $0 < p \leqslant 1$, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on a :

$$\mathbb{P}\left(X = k\right) = p(1-p)^{k-1}$$

Propriété 5 ***Espérance d'une loi géométrique, admise***

Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi géométrique de paramètre** p **tel que** $0 < p \leqslant 1$, l'espérance de X est égale à :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}}$$

Capacité 5 ***Utiliser une loi géométrique, voir exo 16 p. 203***

1. Quel est le nombre moyen de lancers pour obtenir un premier 6, lors d'une répétition d'expériences indépendantes de lancers d'un dé équilibré à 6 faces ?

2. Dans chaque cas, Y désigne une variable aléatoire, suivant une loi géométrique de paramètre p tel que $0 < p \leqslant 1$.

   a. Déterminer p si $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{3}{2}$.

   b. Déterminer p si $\mathbb{P}\left(Y > 2\right) = 0,49$.

3.2 Une loi sans mémoire

Propriété 6

Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi géométrique de paramètre** p **tel que** $0 < p \leqslant 1$, pour tout entier naturel n, on a :

$$\mathbb{P}\left(X > n\right) = (1-p)^n$$

Propriété 7 *Loi sans mémoire*

Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi géométrique de paramètre** $p > 0$.
Pour tous entiers naturels $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$, on a :

$$\mathbb{P}_{X>n}(X > n+k) = \mathbb{P}(X > k)$$

Démonstration

....

....

Capacité 6 *Utiliser une loi géométrique, voir aussi exercice 92 p.212*

Soit Z la variable aléatoire simulée par la fonction Python ci-dessous.

```
from random import randint
# randint(1, 6) est un entier aléatoire entre 1 et 6

def dé():
    """Simule le lancer d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6
       """
    return randint(1, 6)

def Z():
    """Simule une variable aléatoire Z"""
    rang_lancer = 1
    while dé() < 6:
        rang_lancer = rang_lancer + 1
    return rang_lancer
```

1. Donner la loi suivie par la variable aléatoire Z, préciser sa ou ses caractéristique(s).
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité $\mathbb{P}(Z = 3)$.
3. Calculer la valeur exacte de la probabilité $\mathbb{P}(Z > 7)$.
4. Le joueur n'a pas obtenu de 6 sur ses trois premiers lancers. Calculer la valeur exacte de la probabilité que le premier 6 n'arrive pas avant le septième lancer.