Histoire 1

Il y a 2500 ans environ, Zénon d'Élée énonçait le **paradoxe d'Achille et la tortue** : « *Achille voit une tortue devant lui. Il court pour la rattraper mais il ne pourra y arriver car lorsque Achille atteint la place qu'occupait la tortue, cette dernière a avancé; il doit donc atteindre maintenant la place qu'elle occupe alors, et ainsi de suite ...* ». Ce paradoxe peut être résolu avec la définition rigoureuse de limite d'une fonction fixée par Weierstrass (1815-1897) et la construction des nombres réels par Dedekind (1831-1916) qui fonde un continu mathématique correspondant au continu de notre intuition physique.

1 Limite en l'infini d'une fonction

1.1 Limite réelle en l'infini, asymptote horizontale

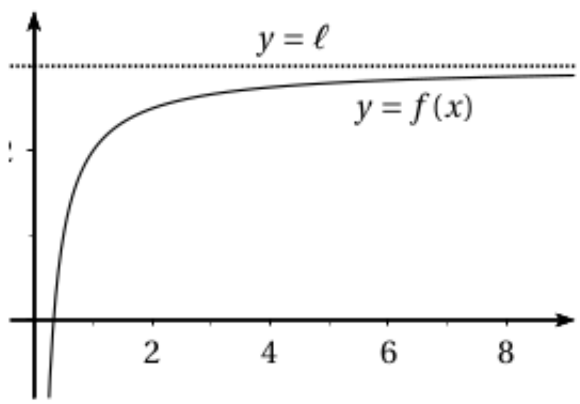
Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;+\infty[$ et soit ℓ un réel.

- **Si $f(x)$ prend des valeurs aussi proches de ℓ que l'on veut pour x assez grand, alors on dit que $f(x)$ admet pour limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$** et on note :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x)=\ell}$$

- On dit alors que la droite d'équation $y=\ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.



La droite d'équation $y=\ell$ est asymptote à courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty\,; a]$ et soit ℓ un réel.

- **Si $f(x)$ prend des valeurs aussi proches de ℓ que l'on veut pour x négatif et assez grand en valeur**

absolue, alors on dit que $f(x)$ admet pour limite ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{-\infty} f(x) = \ell}$$

- On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

Capacité 1 *Relier asymptotes horizontales et limites, exo 7p.63*

Soit f une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{-\infty} f(x) = 4$ et $\lim_{+\infty} f(x) = -2$.

1. Représenter une courbe possible pour f en traçant ses droites asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$.

2. f est-elle nécessairement une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$?

1.2 Limite infinie en l'infini

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[\alpha\,; +\infty[$.

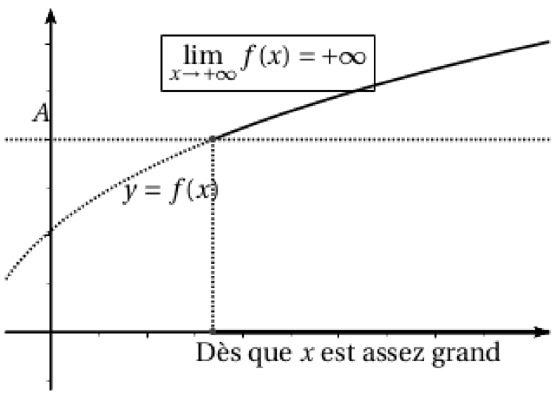
- **Si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour x assez grand alors on dit que $f(x)$ admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$** et on note :

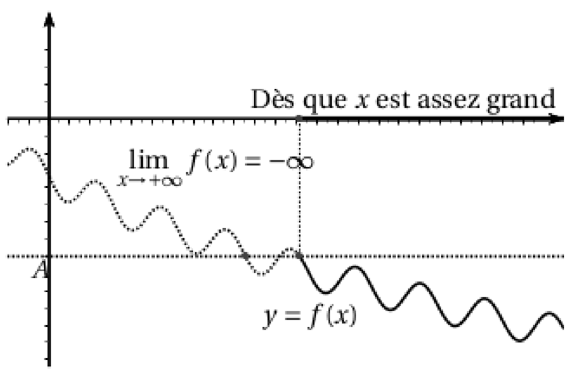
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x) = +\infty}$$

- **Si $f(x)$ prend des valeurs négatives aussi petites que l'on veut pour x assez grand alors on dit que $f(x)$ admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$** et on note :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x) = -\infty}$$

On a des définitions similaires pour $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$





Capacité 2 ***Comprendre la définition d'une limite en l'infini***

1. Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse :
   - **Affirmation 1 :** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors f croissante sur son intervalle de définition.
   - **Affirmation 2 :** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors $f(x) < 0$ pour x assez grand.
2. Formulez une propriété vraie si f est une fonction telle que :

   a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 701$

1.3 Lien avec les suites

Propriété 1 ***admise***

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$.
Si la limite de la fonction f en $+\infty$ existe alors la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant a$ par $u_n = f(n)$, possède la même limite.

1.4 Limites de référence en l'infini

Propriété 2

1.
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

2.
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

3.
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

4.

Soit $p \in \mathbb{R}$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} p = p$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} p = p$

5.

Si $m > 0$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} mx + p = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} mx + p = -\infty \end{cases}$

6.

Si $m < 0$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} mx + p = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} mx + p = +\infty \end{cases}$

7.
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \end{cases}$$

Propriété 3 ***Limites de la fonction exponentielle***

- $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = \ldots.$
- $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \ldots.$

La droite d'équation …… est asymptote à la courbe de la fonction exponentielle au voisinage de $-\infty$.

2 Limite d'une fonction en un réel a

Dans toute cette section, on considère une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ et un réel a tel que soit $a \in \mathcal{D}_f$, soit a est une borne de $\mathcal{D}_f$.

2.1 Limite infinie en a, asymptote verticale

Définition 4

- **Une fonction f a pour limite $+\infty$ en a si $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut, pour x assez proche de a.**

  On note $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty}$.

- **Si on considère la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap]a; +\infty[$, on dit que f a pour limite $+\infty$ à droite de a (ou en a^+) si $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut pour x assez proche de a et vérifiant $x > a$.**

  On note $\boxed{\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty}$.

- On définit de même que f a pour limite $+\infty$ à gauche de a (ou en a^-) et on note $\boxed{\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty}$.

- **Si f a pour limite $+\infty$ en a, en a^+ ou en a^-, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.**

- **Une fonction f a pour limite $-\infty$ en a si $f(x)$ est négatif et aussi petit que l'on veut, pour x assez proche de a.**

  On note $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty}$.

- **Si on considère la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap]-\infty; a[$, on dit que f a pour limite $+\infty$ à droite de a (ou en a^-) si $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut pour x assez proche de a et vérifiant $x < a$.**

  On note $\boxed{\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty}$.

- On définit de même que f a pour limite $-\infty$ à gauche de a (ou en a^-) et on note $\boxed{\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty}$.

2.2 Limite finie en a et limites de référence

Définition 5

Une fonction f a pour limite ℓ en a si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ pour x assez proche de a.
On note : $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell}$.
En particulier, si $a\in\mathscr{D}_f$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ alors $\ell=f(a)$.
Comme pour les limites infinies, on peut avoir besoin de définir les notions de limite finie à droite en a notée $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=\ell}$ ou de limite finie à gauche en a notée $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=\ell}$.

Propriété 4 *admise*

1. Soit a un réel :
   - Si $a\geqslant 0$ alors $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$
   - Si f est un polynôme ou un quotient de polynômes défini en a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.
   - $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^a$
2. $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$$
3. $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}-\infty & \text{si } n \text{ est impair}\\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair}\end{cases}$$
4. $$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

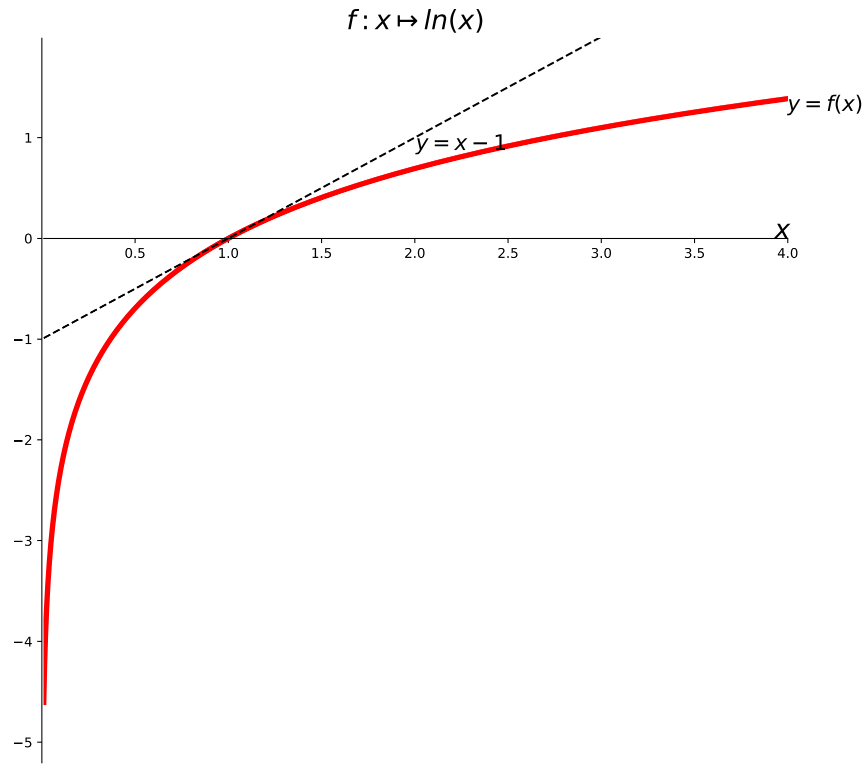
Capacité 3 *Interpréter un tableau de variations, exo 8 p.63, exo 11 p.65*

On considère une fonction f dont on donne ci-dessous le tableau de variation.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormal du plan.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	731	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	732

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Quelles sont les valeurs de $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x<-1}} f(x)$ et de $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x>-1}} f(x)$?
3. Quelles sont les limites de f en 1^- et 1^+ ?
4. Déterminer les éventuelles droites asymptotes horizontales et verticales à $\mathscr{C}_f$.
5. Dans un repère orthonormal du plan, tracer les droites asymptotes à $\mathscr{C}_f$ puis une représentation possible de $\mathscr{C}_f$.

3 Limites de la fonction logarithme népérien



Propriété 5 ***admise***

☞ Limites aux bornes de l'intervalle de définition :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty}$$

☞ On a $\boxed{\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1}$ qui peut s'écrire $\boxed{\lim_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1}$

On en déduit une approximation de $\ln(x)$ quand x est proche de 1 : $\boxed{\ln(x) \underset{x\to 1}{\approx} x-1}$.

Propriété 6 ***Tableau de variation complet***

1. Des propriétés sur le sens de variation et les limites de la fonction ln, on peut déduire son tableau de variations complet :

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2. La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote à la courbe de la fonction ln.

4 Règles opératoires sur les limites

Dans toute cette section les fonctions u et v sont deux fonctions admettant une limite finie ou infinie, lorsque x tend vers a qui peut être un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
L'abréviation FI signifie forme indéterminée, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de théorème général permettant de conclure.

4.1 Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	L'	L'	L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)+v(x) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

4.2 Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	ℓ'	$\ell'>0$ ou $\ell'<0$	$\ell'>0$ ou $\ell'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)\times v(x) =$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

4.3 Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$\ell>0$ ou $\ell<0$	$\ell>0$ ou $\ell<0$
$\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	$\ell'\neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	$\ell'>0$ ou $\ell'<0$	$\ell'>0$ ou $\ell'<0$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{u(x)}{v(x)} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$

$\lim\limits_{x \to a} u(x) =$	$-\infty$	$+\infty$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} v(x) =$	0^+ ou 0^-	0^+ ou 0^-	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u(x)}{v(x)} =$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0^- ou 0^+	0^- ou 0^+	FI	FI

Capacité 4 ***Déterminer une limite par règles opératoires***

1. Faire les exercices 16 et 17 page 67 du manuel Hyperbole.
2. Toutes les limites suivantes sont bien définies, déterminer leur valeur par règle opératoire :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^x)\ln(x)$

b. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} - \ln(x)$

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - e^x$

d. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\ln(x)$

e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x^2}{e^{-2x}}\right)$

f. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{1}{x-1}$

g. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{1}{x-1}$

h. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{1}{\ln(x)}$

i. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{1}{\ln(x)}$

j. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^5 + e^x}{e^x - 3}$

4.4 Formes indéterminées pour les fonctions polynômes ou quotient de polynômes

Il existe quatre formes indéterminées : « $\infty - \infty$ » ,« $\infty \times 0$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », $\dfrac{0}{0}$ ».En pratique, pour lever l'indétermination, on change de forme en factorisant par exemple par les termes prépondérants (en l'infini pour tous entiers $n > p$, x^n l'emporte sur x^p, et x^n l'emporte sur $\sqrt{x}$).

Méthode

- Pour lever une forme indéterminée de la forme $+\infty + (-\infty)$, on peut essayer de changer de forme en factorisant l'expression par le terme prépondérant. Pour une fonction polynôme, le terme prépondérant en $+\infty$ ou $-\infty$ est le terme de plus haut degré.
- Pour lever une forme indéterminée de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$ ou $\dfrac{0}{0}$, on peut factoriser le numérateur et le dénominateur par leur terme prépondérant puis simplifier le quotient des termes prépondérants.

Capacité 5 ***Lever une forme indéterminée en factorisant le terme prépondérant***

1. Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2x^5 + 3x^4 - x + 1$.

   Déterminer la limite de h en 0, puis en $-\infty$ et enfin en $- + \infty$
2. Soit f définie sur $\mathbb{R} \backslash \{-2; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 + x - 2}$$

a. Déterminer la limite de f en chacune des bornes de son ensemble de définition.

b. Interpréter graphiquement ces limites.

5 Limite d'une fonction composée

5.1 Notion de fonction composée

Méthode

Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$.

☞ Décomposons le calcul de l'image de -7 par la fonction g :

$$\overbrace{-7 \xmapsto{u} 2-(-7) = 9 \xmapsto{v} \sqrt{9} = 3}^{g}$$

L'image de -7 s'obtient par enchaînement de deux fonctions :

- On calcule d'abord $u(-7) = 2-(-7) = 9$ image de -7 par la fonction $u : x \mapsto 2-x$.
- Ensuite on calcule $v(9) = 2-(-7)$ image de $u(-7)$ par la fonction $v : y \mapsto \sqrt{y}$.

☞ Et si on veut déterminer l'image de l'image de 3 par la fonction g ?

- $3 \xmapsto{u} 2-3 = -1$
- ⚠ On ne peut pas déterminer l'image de -1, qui est négatif, par $v : y \mapsto \sqrt{y}$

L'image de 3 par la fonction g n'est pas définie car l'image de 3 par la première fonction de l'enchaînement n'appartient pas à l'intervalle de définition de la deuxième fonction v de l'enchaînement.

☞ $g(x)$, s'il est défini, s'obtient par l'enchaînement de deux fonctions :

- on part de x auquel on associe $2-x$ par la fonction $u : x \mapsto 2-x$.
- ensuite à $u(x) = 2-x$ on associe $\sqrt{u(x)} = \sqrt{2-x}$ par la fonction $v : y \mapsto \sqrt{y}$ où $2-x$ est substitué à la variable y.

On dit que g est la **composée** de la fonction u suivie de la fonction v, et on a $\boxed{g(x) = v(u(x))}$.

On note $\boxed{g = v \circ u}$ où $\circ$ est l'opérateur de **composition**.

$$\overbrace{x \xmapsto{u} 2-x \xmapsto{v} \sqrt{2-x}}^{g}$$

Définition 6

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a $u(x) \in \mathrm{J}$.
La fonction composée u suivie de v, notée $v \circ u$, est la fonction définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$.

5.2 Limite par composition

Théorème 1 ***admis***

Soit u une fonction définie sur intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que $\forall x \in \mathrm{I}, u(x) \in \mathrm{J}$.
On peut définir sur I la fonction composée $g : x \mapsto (v \circ u)(x)$ par $g(x) = v(u(x))$.
Soit trois réels a appartenant à I (ou borne de I), b appartenant à J (ou borne de J) et c tels que :

$$\lim_{x \to a} u(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{X \to b} v(X) = c$$

alors on a par composition des limites :

$$\lim_{x \to a} v(u(x)) = c$$

Ce théorème s'applique également aux suites $(v(u_n))_{n \geqslant 0}$ définies par composition (avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = b$).
On peut remplacer a, b ou c par $+\infty$ ou $-\infty$.

Capacité 6 ***Déterminer une limite par composition, voir exos 64 et 65 p.74***

On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0,5$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus on sait que :

$f(-2) = -3 \qquad \text{et} \qquad f(3) = 2$

On donne le tableau de variation d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2\}$, on note $\mathscr{C}_g$ la courbe de g dans un repère du plan.

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-5

1. Calculer $g(f(-2))$ puis déterminer un encadrement de $g\left(f(3)\right)$.

2. **a.** Que vaut $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} g(x)$? Interpréter graphiquement cette limite.

   b. Tracer dans un repère une représentation possible de la courbe $\mathscr{C}_g$ avec ses droites asymptote(s)qu'on peut déduire du tableau de variation de g et sa tangente au point d'abscisse 1.

3. En justifiant déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)-f(x)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\times f(x)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(f(x))$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(f(x))$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(g(x))$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(g(x))$

Capacité 7 ***Résoudre un problème en utilisant les propriétés de la fonction logarithme***

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à $1,30$ m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ et déterminer ses limites aux bornes de son intervalle de définition.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

6 Limites par comparaison ou encadrement

Propriété 7 ***Passage à la limite dans une inégalité***

Soit a un réel (ou $+\infty$ ou $-\infty$), soit I un intervalle contenant a ou dont a est une borne, soit f une fonction définie sur I telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et soit k un réel.

Si pour tout réel $x\in$ I on a $f(x)<k$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leqslant k$.

Lorsqu'on passe à la limite dans une inégalité, son sens est conservé mais elle devient une inégalité large.

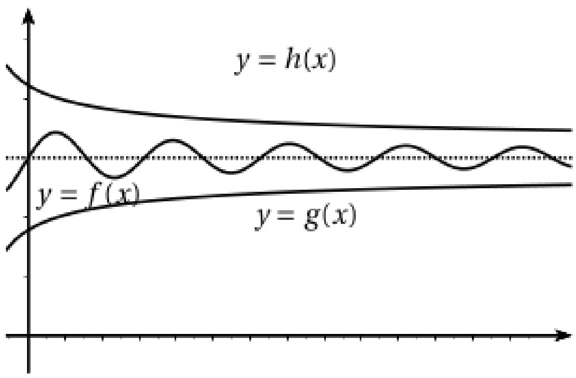
Théorème 2 ***Théorème d'encadrement dit « des gendarmes », admis***

Soient f, g, h trois fonctions définies sur un intervalle I du type $]a\,;\,+\infty[$ telles que :

- pour tout $x\in$ I, on ait $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ell$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

Un théorème similaire permet d'obtenir une limite par encadrement lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers un réel b.



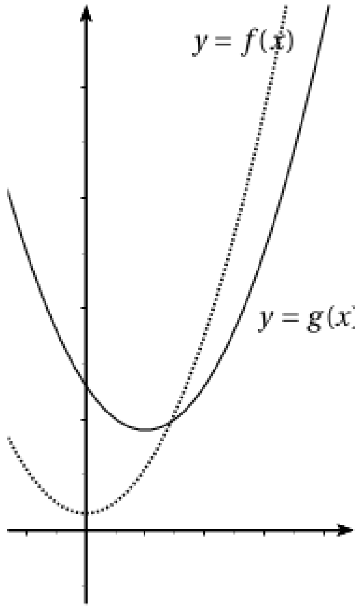
Théorème 3 ***Théorème de comparaison***

Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I du type $]a\,; +\infty[$.

1. Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $g(x) \leqslant f(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Un théorème similaire permet d'obtenir une limite infinie par comparaison lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers un réel b.



Capacité 8 ***Utiliser les théorèmes de limite par comparaison ou encadrement, voir exos 66 et 67 p. 74***

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,; +\infty[$ par $f(x) = 2\mathrm{e}^x - x$.

   a. Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

   b. En déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant x$.

   c. Conclure sur la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Soit la fonction g définie sur $]-\infty\,; 0[\cup]0\,; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + 1$.

   a. Représenter graphiquement la courbe de g avec sa calculatrice et conjecturer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b. En utilisant un encadrement de $\sin(x)$, déterminer un encadrement de $g(x)$ pour tout réel x et en déduire les limites conjecturées.

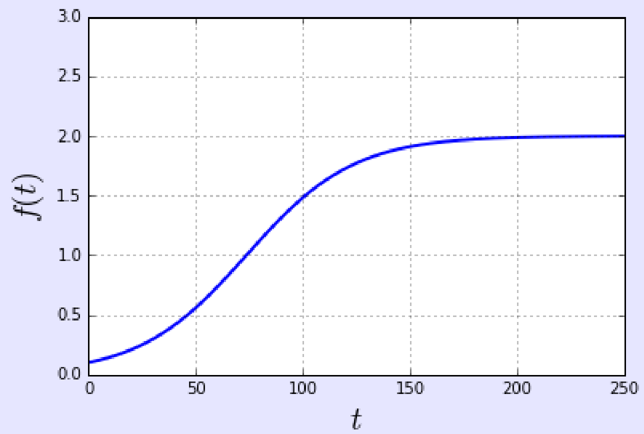
7 Thèmes du programme

Thème 1 ***Modèle d'évolution et modèles définis par une fonction d'une variable***

La croissance d'un plant de mais est modélisée par la fonction f définie par :

$$f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \frac{2}{1+19\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

$f(t)$ désigne la hauteur du plant en mètres, t est la variable temps exprimée en jours avec $t \in [0; +\infty[$.
La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle.
Sur le graphique ci-après, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ de f.



1. Justifier que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f(t) < 2$.
2. Soit t un réel appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, déterminer $f'(t)$.

   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Justifier que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice. Dresser le tableau de variation complet (avec limites aux bornes) de la fonction f.
4. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que `seuil(epsilon)` renvoie le plus petite entier n tel que $2 - \texttt{epsilon} < f(n) < 2$ avec `epsilon` un réel strictement positif (et supérieur à 10^{-15} !).

```
from math import exp #import de la fonction exponentielle
def f(t):
    return 2 / (1 + 19 * exp(-0.04*t))

def seuil(epsilon):
    n = 0
    while ................... :
        ................
    return n
```

Table des matières