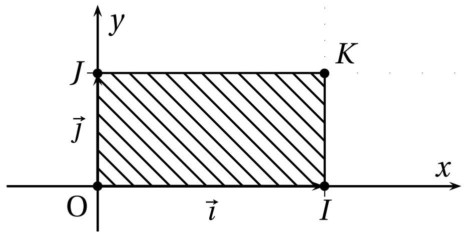
1 Intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle

Dans toute cette section :

- *on considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$;*
- *les propriétés énoncées pour des fonctions continues sur I sont aussi valables pour des fonctions en escaliers sur I.*

1.1 Unité d'aire



Définition 1

Soit $\mathscr{P}$ le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soient I, J et K les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. On appelle unité d'aire (notée u.a.) l'unité de mesure des aires telle que Aire$(OIKJ) = 1$ u.a.

Remarque 1

- $OIKJ$ peut être un carré : le repère est alors orthonormal.
- Si l'on a, par exemple, $OI = 3$ cm et $OJ = 2$ cm, alors 1 u.a. = 6 cm^2.

1.2 Intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle

Définition 2

Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a ; b]$ dont la courbe est notée $\mathscr{C}_f$.
On appelle *aire sous la courbe de f entre $x = a$ et $x = b$* l'aire, exprimée en u.a., du domaine $\mathscr{D}$ défini par :

$$M(x ; y) \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

L'intégrale de f entre a et b est l'aire sous $\mathscr{C}_f$ entre $x = a$ et $x = b$, exprimée en u.a..

On la note : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

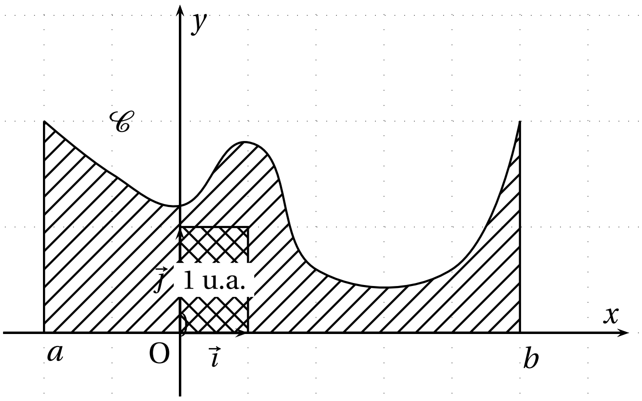
a et b sont **les bornes** de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque 2

- On peut noter indifféremment $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \ldots$

  La variable d'intégration est une variable *liée* ou *muette* , on peut l'appeler x ou t ou $u \ldots$.

- Si $a = b$ alors $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.
- On $\displaystyle\int_a^b 1\mathrm{d}x = b-a$ c'est l'aire d'un rectangle de hauteur 1 et de base $b-a$ mais c'est aussi la longueur de l'intervalle $[a\,;\,b]$.



1.3 Quelques exemples

Capacité 1 ***Calculs d'aires élémentaires, voir capacité 1 p.331***

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,2]$ par $f(x) = 2 - x$.

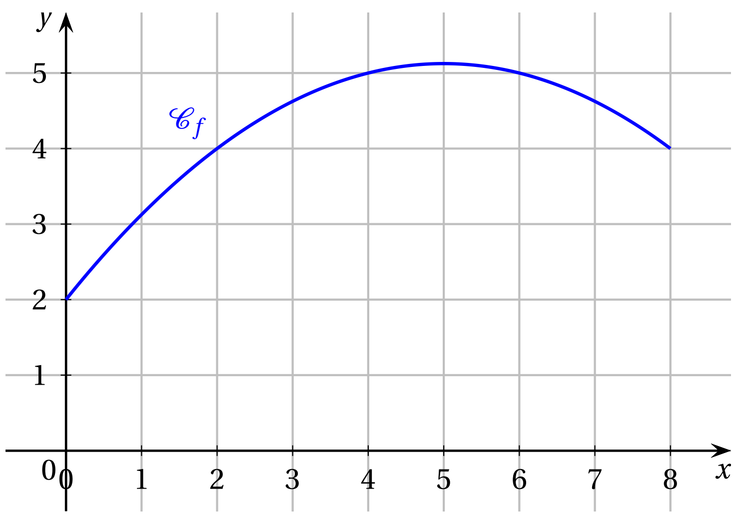
1. Représenter les surfaces dont les aires, en unités d'aire, sont égales aux intégrales :

$$I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } J = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Calculer ces intégrales et vérifier avec la calculatrice.

Capacité 2 ***Interpréter une aire comme une intégrale***

On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,8]$ dont $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative dessinée ci-dessous :



Choisir la bonne réponse :

A. $8 \leqslant \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 9$	**B.** $9 \leqslant \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 10$
C. $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = f(4) - f(2)$	**D.** $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 9$

1.4 Relation de Chasles

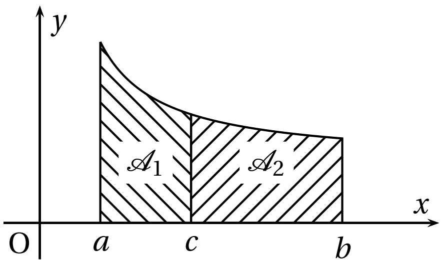
Propriété 1 ***Relation de* Chasles**

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle I et a, b et c trois réels de I tels que $a \leqslant c \leqslant b$.
Sous ces hypothèses, on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Cette relation, dite de Chasles traduit simplement l'additivité des aires.

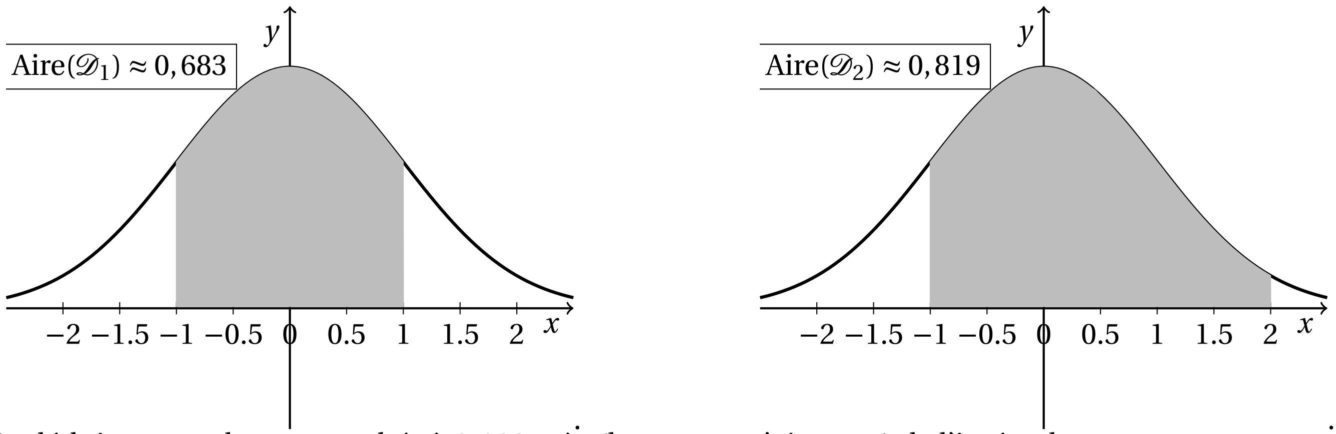
Sur la figure ci-dessous, on a $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$



Capacité 3 ***Utiliser la relation de Chasles et l'additivité des aires***

La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et on donne ci-dessous des valeurs approchées à $0,001$ près :

- de l'aire du domaine $\mathscr{D}_1$ délimité par les droites d'équations $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ et par la courbe d'équation $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$;
- de l'aire du domaine $\mathscr{D}_2$ délimité par les droites d'équations $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ et par la courbe d'équation $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.



En déduire une valeur approchée à 0,002 près (les erreurs s'ajoutent) de l'intégrale :

$$\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

2 Primitives d'une fonction continue

2.1 Théorème fondamental

Théorème 1 ***théorème fondamental***

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

La fonction F définie sur $[a\,;\,b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et sa dérivée est f.

Capacité 4 ***Étudier une fonction définie par une intégrale***

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.

On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament.

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.

Le modèle mathématique est : $f(t) = 20\mathrm{e}^{-0,1t}$, avec $t \in [0\,;\,+\infty[$.

La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20\,\mu$g.L^{-1}.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.

   Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.

2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu$g.L^{-1}.

   Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

3. En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en μg.L^{-1}, le nombre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

Vérifier que pour ce modèle, l' ASC est égal à 200 μg.L^{-1}.

2.2 Primitives d'une fonction continue

Définition 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle *primitive de* f toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I.
« F a pour dérivée f » équivaut à « F est une primitive de f »

Théorème 2 ***Conséquence du théorème fondamental***

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Théorème 3 ***démontré dans le chapitre équations différentielles***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I.

1. G est une primitive de f sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
2. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
   Il existe une unique primitive H de f sur I telle que $H(x_0) = y_0$.

Capacité 5 ***Primitive définie par une intégrale***

Soit la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour $x > 0$.
2. Déterminer la valeur exacte de $F(\mathrm{e}) = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

3 Intégrale d'une fonction continue

3.1 Intégrale d'une fonction continue positive à l'aide d'une primitive

Théorème 4

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Soit F une primitive de f. On a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Le calcul de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.

On note aussi : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

Démonstration

f est continue et positive sur I donc d'après le théorème fondamental, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f.
De plus on a : $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$
Pour tout $b \in$ I on a donc :

$$F(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Or $F(a) = 0$ donc :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

La variable d'intégration t est muette, on peut la remplacer par x

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

De plus, si G est une autre primitive de f sur I alors d'après le théorème 4, il existe une constante k telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$ et donc $G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Capacité 6 *Calculer une intégrale (exo résolu 10 p. 173) et utiliser une symétrie pour calculer une aire (exo résolu 2 p. 169)*

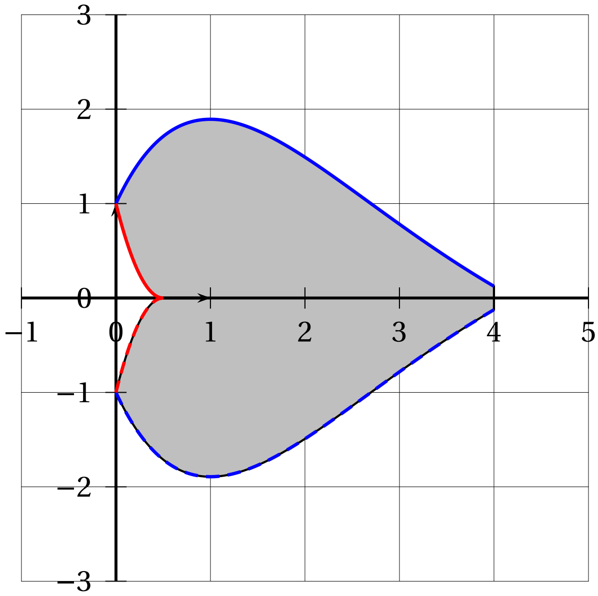
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par :

$$f(x) = (3,6x + 2,4)\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 0{,}5]$ par :

$$g(x) = 4x^2 - 4x + 1.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle $[0 ; 0{,}5]$.
On a tracé ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère d'origine O et, en pointillés, les courbes obtenues par symétrie de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ par rapport à l'axe des abscisses :



1. **a.** Démontrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $F(x) = (-6x-14)\mathrm{e}^{-0,6x} - \dfrac{7}{5}x$ est une primitive de f.

   b. En déduire que $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 5,6 + 38\mathrm{e}^{-2,4}$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$.

3. On considère le domaine plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, leurs courbes symétriques (en pointillés) ainsi que la droite d'équation $x = 4$.

   Ce domaine apparaît grisé sur la figure ci-dessus.

   Calculer une valeur approchée de l'aire, en unités d'aire, de ce domaine.

3.2 Généralisation de la notion d'intégrale

Définition 4

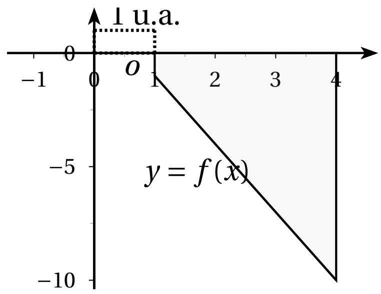
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f, et a et b deux réels quelconques de I.
On appelle intégrale de f entre a et b la différence $F(b) - F(a)$.
On note : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Remarque 3

- Si $a \leqslant b$ et f est continue positive sur $[a\,;\,b]$, cette définition est cohérente avec la définition 1 d'après le théorème 5.
  $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente(en unités d'aire) l'aire du domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (sous $\mathscr{C}_f$).

- Si $a \leqslant b$ et f une fonction négative et continue sur $[a\,;\,b]$,
$\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a) = -F(a) - (-F(b)) = \int_a^b -f(x)\ \mathrm{d}x$
est l'opposé de l'aire du domaine $\mathscr{D}'$ compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (au-dessus de $\mathscr{C}_f$).

  Par exemple, ci-contre on a représenté la courbe de la fonction f définie sur $[1\,;\,4]$ par $f(x) = 2 - 3x$ qui est négative sur $[1\,;\,4]$. L'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$ est égale à ...



- Si $a \leqslant b$ et f de signe quelconque sur $[a\,;\,b]$, on découpe l'intervalle en intervalles sur lesquels f garde un signe constant.
$\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ est la somme des intégrales calculées sur chaque intervalle inclus dans $[a\,;\,b]$, où f est de signe constant. C'est la somme algébrique des aires des domaines ainsi définis.

Capacité 7 ***Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, voir exos résolus 10 et 11 p.173***

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^4 x^2 \mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_4^1 x^2 \mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^2 \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\ \mathrm{d}x;$

5. $\displaystyle\int_2^4 \frac{3x^2}{\left(1 + x^3\right)^2}\ \mathrm{d}x;$

6. $\displaystyle\int_e^{e^3} \frac{1}{x \ln x}\ \mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1 + \mathrm{e}^t}\ \mathrm{d}t$

8. $\displaystyle\int_2^e \frac{1}{x}\ln(x)\ \mathrm{d}x$

4 Propriétés de l'intégrale

Dans toute cette section, on considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthogonal $\left(O,\ \overrightarrow{\imath}\ ,\ \overrightarrow{\jmath}\right)$

4.1 Relation de Chasles

Propriété 2 ***Relation de* CHASLES*, généralisation***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels de I.

On ne suppose pas ici que f est positive et que $a \leqslant c \leqslant b$

Alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque 4
On peut étendre la définition de l'intégrale d'une fonction continue f entre deux bornes a et b au cas où les deux bornes ne sont pas dans l'ordre croissant.
Par exemple si $b > a$ on peut définir $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.
D'après la relation de Chasles on doit avoir : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
On en déduit donc un corollaire utile de la relation de Chasles : $\boxed{\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$

4.2 Linéarité de l'intégrale

Propriété 3 ***Linéarité, admis***
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I et α et β deux réels quelconques. Alors :

- $\int_a^b (\alpha f(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- Plus généralement : $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- En particulier : $\int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Capacité 8 ***Application des propriétés de l'intégrale***
Soient f et g deux fonctions continues sur $[1\,;5]$, on donne :

$$I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -3 \qquad J = \int_5^2 f(x)\mathrm{d}x = 2 \qquad K = \int_1^5 g(x)\mathrm{d}x = 12$$

Calculer $L = \int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$, $M = \int_1^5 (f(x)+g(x))\mathrm{d}x$ puis $N = \int_1^5 (2f(x)-3g(x))\mathrm{d}x$

4.3 Intégrale et inégalités

Propriété 4 ***Intégrale et inégalités, admis***
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a \leq b$ deux réels de I.

1. Si $f \geq 0$ sur I alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.
2. Si $f \leq 0$ sur I alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq 0$.
3. Si $f \leq g$ sur I alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Capacité 9 ***Encadrer une intégrale, voir exo résolu 18 p.175***

1. Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, on a :

$$0 \leqslant x\mathrm{e}^{-x} \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$$

2. En déduire que :

$$0 \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

5 Applications du calcul intégral

5.1 Calcul de l'aire entre deux courbes

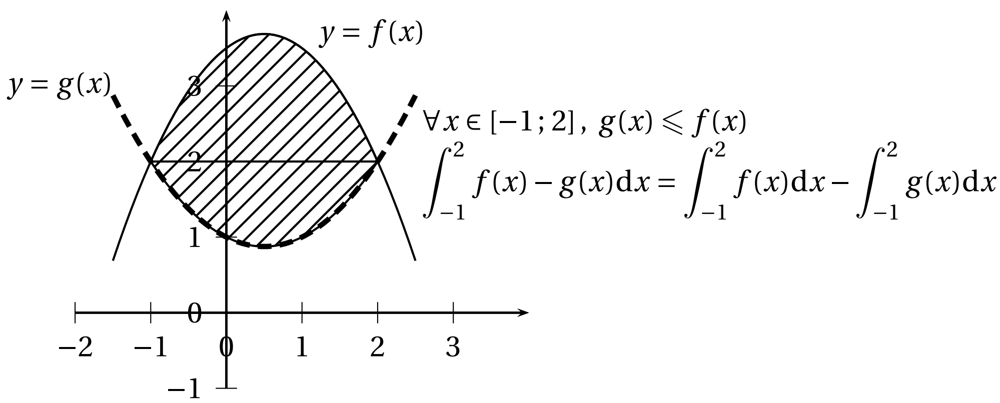
Propriété 5

Soient f et g deux fonction continues positives sur $[a;b]$ telles que pour tout $x \in [a;b]$, $g(x) \leqslant f(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

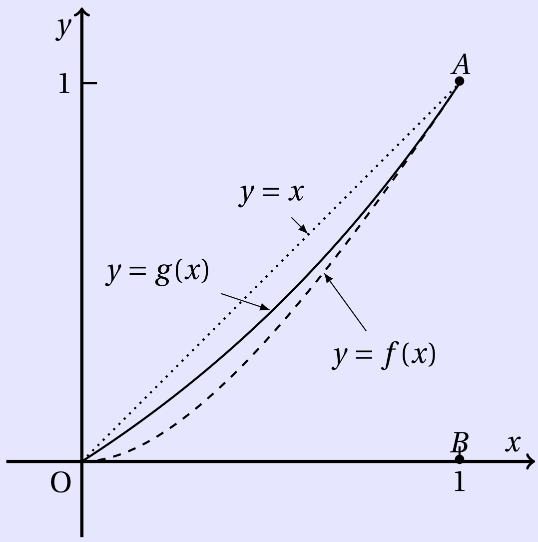
représente l'aire (en un u.a.) du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Si f ou g n'est pas positive sur $[a;b]$ mais que $f \leqslant g$ sur $[a;b]$, $\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$ représente aussi l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Thème 1 ***Courbe de Lorenz et coefficient de Gini, calculs d'aires, répartition des richesses et inégalités***

On a représenté ci-dessous dans un repère orthonormal du plan et sur l'intervalle $[0\,;1]$, la droite d'équation $y = x$ et les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = 2x + \dfrac{2}{x+1} - 2$ et $g(x) = 0,5\mathrm{e}^x - (0,5\mathrm{e} - 1,5)x - 0,5$.
On a placé aussi les points $A(1\,;1)$ et $B(1\,;0)$.



Les courbes des fonctions f et g illustrent la répartition des surfaces agricoles de deux pays F et G en fonction de la taille des exploitations : on parle de *courbes de Lorenz*.
On admet que les fonctions f et g sont positives et croissantes sur l'intervalle $[0\,;1]$ et que pour tout $x \in [0\,;1]$ on a $f(x) \leqslant x$ et $g(x) \leqslant x$.
Par exemple, on a $g(0,4) \approx 0,30$ ce qui signifie que dans le pays G, 40 % des exploitations les plus petites représentent environ 30 % de la superficie des exploitations du pays.
De plus on a $f(0) = g(0) = 0$ et $f(1) = g(1) = 1$.
On appelle *coefficient de Gini* le quotient de l'aire du domaine compris entre la courbe de Lorenz et la droite Δ d'équation $y = x$ par l'aire du triangle OAB.

1. Justifier que le *coefficient de Gini* du pays F est égal à $2 \times \displaystyle\int_0^1 2 - x - \dfrac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire la valeur exacte du *coefficient de Gini* du pays F.
3. Justifier que la valeur exacte du *coefficient de Gini* du pays G est $\dfrac{3-\mathrm{e}}{2}$.
4. Comment la comparaison des *coefficients de Gini* permet-elle de déterminer le pays où la répartition des surfaces agricoles est la plus égalitaire ?

5.2 Valeur moyenne

Définition 5

Soit $a < b$, la valeur moyenne d'une fonction f continue (ou en escaliers) sur un intervalle $[a; b]$ est le nombre :

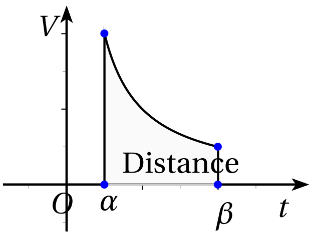
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Capacité 10 *Calculer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction, voir capacité 9 p.337*

Pour $t > 0$ la vitesse d'un mobile est $v(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}$ (en m.s^{-1}).

1. Calculer la distance parcourue entre les instants $t = 1$ et $t = \mathrm{e}^2$ (en s).

2. Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t = 1$ et $t = \mathrm{e}^2$.



Plus généralement, si on note $y = v(x)$ alors $\int_a^b v(x)dx$ est homogène au produit des grandeurs xy (ici m.s^{-1}.s = m). Puisque $b-a$ est homogène à x (en secondes s), la valeur moyenne de v sur $[a; b]$ est homogène à $\frac{xy}{x} = y$ (soir en m.s^{-1}), donc elle est dans la même unité que la fonction intégrée v.

Remarque 5

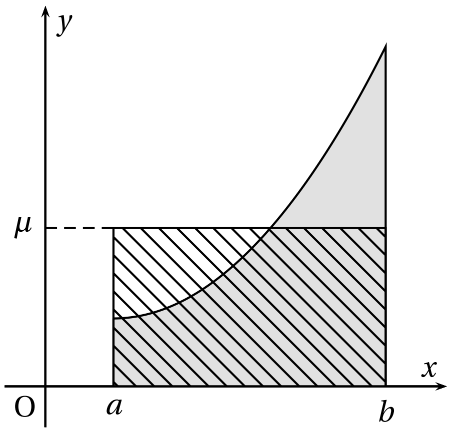
Dans le cas où f est continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ (avec $a \neq b$) , on peut interpréter la valeur moyenne en terme d'aire.

On cherche un nombre μ tel que, en remplaçant chaque valeur de f par μ, la somme des $\mu\mathrm{d}x$ soit la même que la somme des $f(x)\mathrm{d}x$, ce qui revient à chercher une fonction constante telle que l'aire sous la courbe de cette fonction soit la même que l'aire sous la courbe de la fonction f.

Or l'aire sous la courbe entre a et b d'une fonction constante μ vaut $(b-a)\mu$.

On a donc $(b-a)\mu = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Sur la figure ci-contre, l'aire grise et l'aire hachurée sont égales quand μ est égale à la valeur moyenne de la fonction sur $[a; b]$.



‘

Capacité 11 ***Calculer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction, voir exo 79 p.182***

1. On considère que la croissance d'un plant de maïs est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;250]$ par

$$f(t) = \frac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19}$$

Au bout de t jours avec t dans l'intervalle $[0\,;250]$, la hauteur du plant est de $f(t)$ mètres.

   a. Déterminer la valeur exacte de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;250]$.

   b. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

2. Une entreprise acquiert une nouvelle machine qui permet d'obtenir un coût total de fabrication hebdomadaire modélisé par la fonction g définie sur $[0\,;15]$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{0,5x-1} - x^2 + 20x + 20,$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $g(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

Le coût marginal obtenu avec cette nouvelle machine est donné par la fonction g'.

Déterminer la valeur moyenne, arrondie à l'euro, du coût marginal lorsqu'on fabrique entre 5 centaines et 8 centaines de lots.