

Histoire 1

Johan Jensen (1859 - 1925) est un ingénieur et mathématicien autodidacte danois, qui effectua tous ses travaux mathématiques pendant ses loisirs. Il travailla sur les fonctions convexes et laissa son nom à une **inégalité** vérifiée par une fonction convexe f et des n -uplets de réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et (x_1, \dots, x_n) .

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Cette inégalité permet de démontrer, avec la concavité de la fonction logarithme, l'**inégalité arithmético-géométrique**. Pour tout n -uplet de réels positifs (x_1, \dots, x_n) , on a :

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

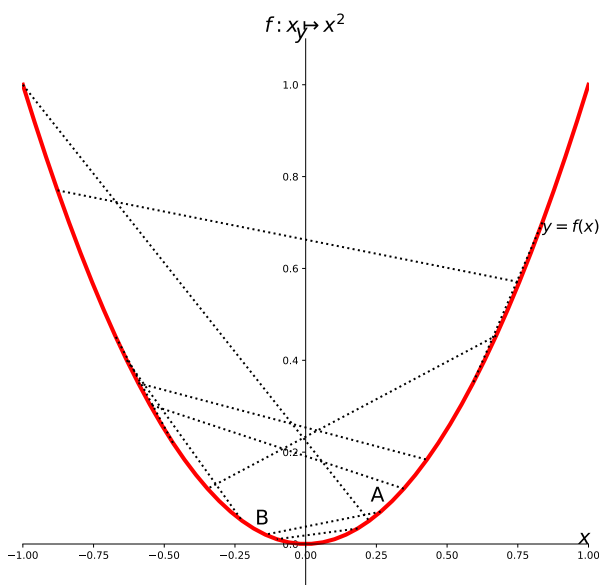
1 Convexité et lecture graphique

Définition 1

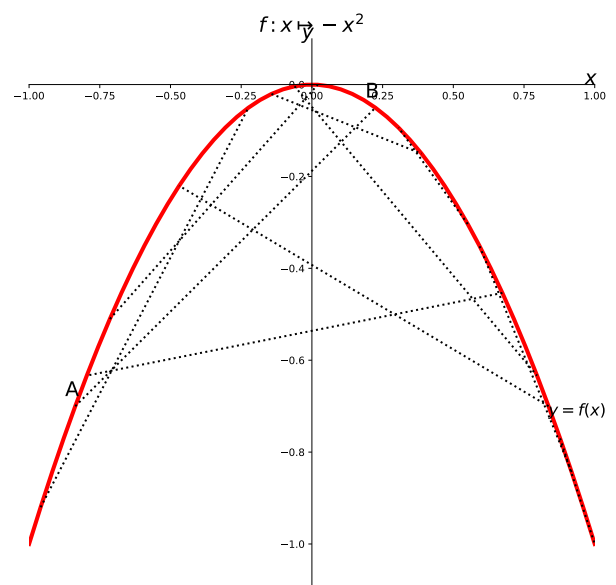
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

- ☞ f est **convexe** sur I si et seulement si pour tous points A et B distincts de \mathcal{C}_f , la corde $[AB]$ est au-dessus de la courbe \mathcal{C}_f entre A et B .
- ☞ f est **concave** sur I si et seulement si pour tous points A et B distincts de \mathcal{C}_f , la corde $[AB]$ est en-dessous de la courbe \mathcal{C}_f entre A et B .

Fonction convexe et cordes



Fonction concave et cordes

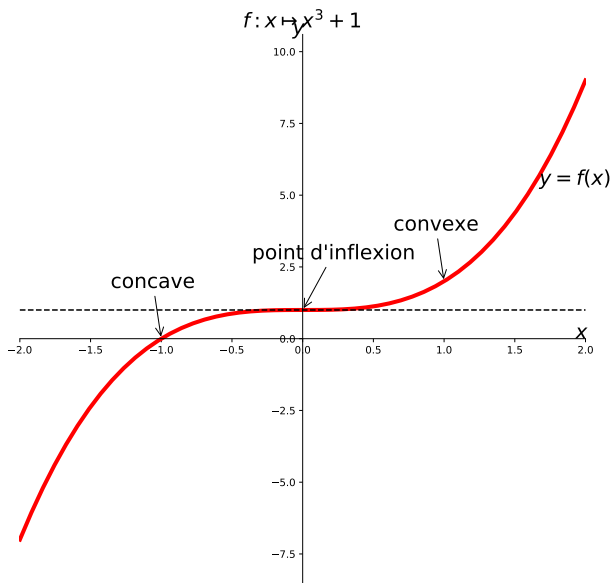


Définition 2

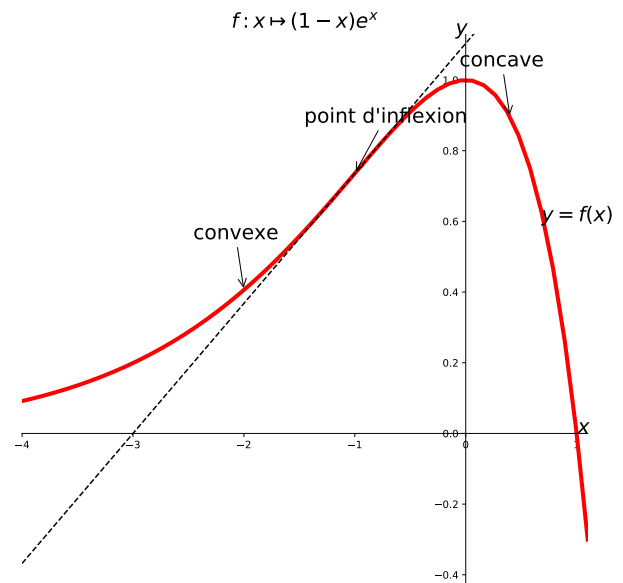
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , \mathcal{C}_f sa courbe dans un repère du plan et a un nombre réel appartenant à I .

Le point A de coordonnées $(a; f(a))$ est un **point d'inflexion** de \mathcal{C}_f si et seulement si \mathcal{C}_f traverse sa tangente au point A .

Point d'inflexion 1



Point d'inflexion 2



Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , \mathcal{C}_f sa courbe dans un repère du plan et a un nombre réel appartenant à I .

Si le point A de coordonnées $(a; f(a))$ est un **point d'inflexion** de \mathcal{C}_f alors la fonction f change de convexité en a : elle passe de convexe à concave ou de concave à convexe.

Capacité 1 Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction

1. Par lecture graphique de leur courbe (représentée si besoin avec la calculatrice), conjecturer la convexité des fonctions suivantes :

a. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 1$.

d. m définie sur \mathbb{R} par $m(x) = e^x$.

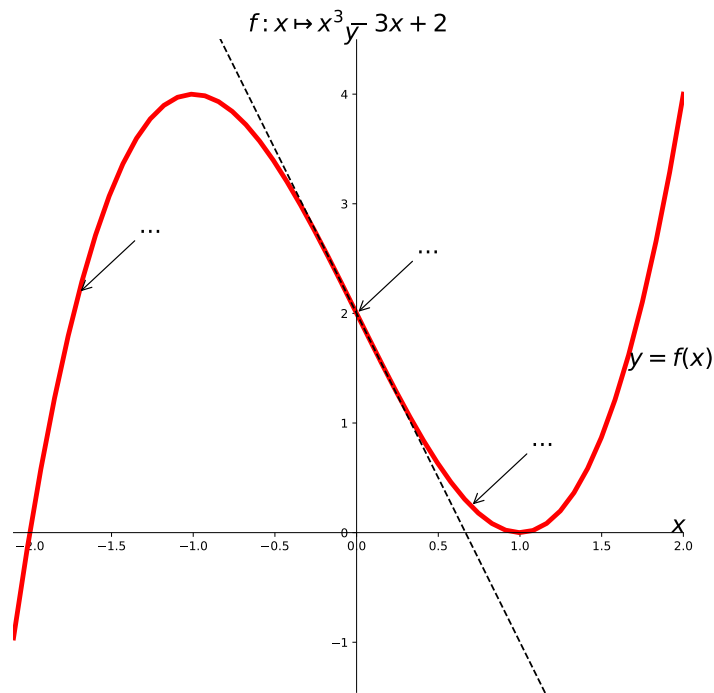
b. g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 1 - x^2$.

e. c définie sur \mathbb{R} par $r(x) = x^3$.

c. h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x}$.

2. Si f est une fonction convexe sur un intervalle I , que peut-on dire de la fonction $-f$?

3. On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction $f: x \mapsto x^3 - 3x + 2$ et sa tangente au point d'abscisse 0. Compléter le graphique ci-dessous en indiquant convexité et point d'inflexion.



2 Convexité et sens de variation de f'



Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. f est **convexe** sur I si et seulement si f' est croissante sur I .
2. f est **concave** sur I si et seulement si f' est décroissante sur I .

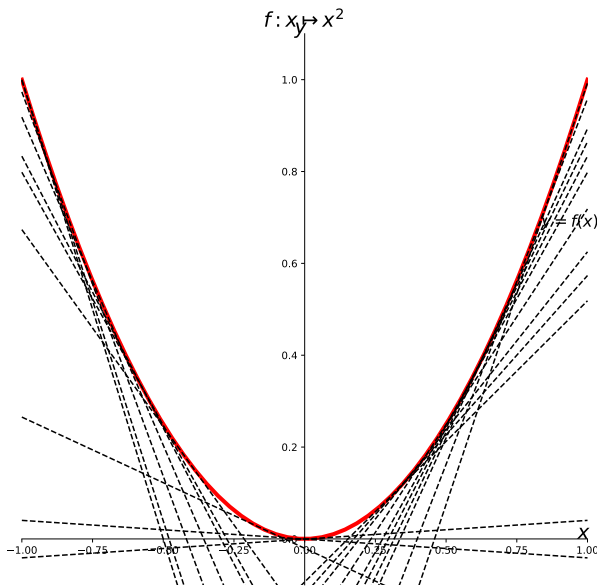


Corollaire

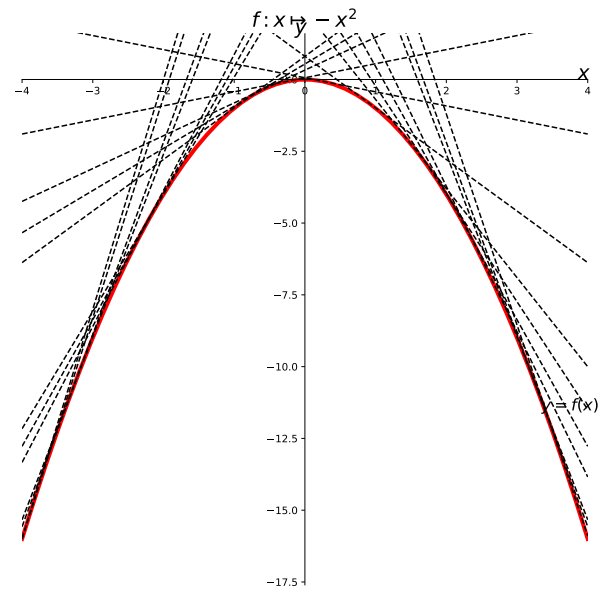
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. Si f est convexe sur I alors \mathcal{C}_f est au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. Si f est concave sur I alors \mathcal{C}_f est en-dessous de chacune de ses tangentes.

Fonction convexe et tangentes



Fonction concave et tangentes



Capacité 2 Lien entre convexité et sens de variation

Compléter les phrases :

- Si f est convexe et croissante sur un intervalle I , alors f croît de plus en plus
- Si f est convexe et décroissante sur un intervalle I , alors f décroît de plus en plus
- Si f est concave et croissante sur un intervalle I , alors f croît de plus en plus
- Si f est concave et décroissante sur un intervalle I , alors f décroît de plus en plus

3 Convexité et signe de la dérivée seconde f''

Propriété 3

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

1. f est **convexe** sur I si et seulement si pour tout réel x appartenant à I , on a $f''(x) \geq 0$.
2. f est **concave** sur I si et seulement si pour tout réel x appartenant à I , on a $f''(x) \leq 0$.

Propriété 4

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. Si pour tout réel x appartenant à I , on a $f''(x) \geq 0$, alors la courbe de f est au-dessus de chacune de ses tangentes.

2. Si pour tout réel x appartenant à I , on a $f''(x) \leq 0$, alors la courbe de f est en dessous de chacune de ses tangentes.

Capacité 3 *Esquisser \mathcal{C}_f à partir des tableaux de variations de f , f' ou f'' , voir capacité 6 p.207*

1. On considère une fonction f deux fois dérivable sur $[-5; 5]$ dont on donne ci-dessous le tableau de variations ainsi que le tableau de variations de sa dérivée f' :

x	-5	-2	2	5
$f(x)$	-1	3	-2	0

x	-5	0	3	5
$f'(x)$	3	-2	2	0

Déterminer la convexité de la fonction f et tracer dans un repère une courbe possible pour f .

2. On considère une fonction g deux fois dérivable sur $[-2; 6]$, dont on donne ci-dessous les tableaux de variations de g et g'' .

x	-2	0	3	4	6
$g''(x)$	1	0	-1	0	2

x	-2	-1	0	2	4	6
$g(x)$	1	-4	3	5	2	0

Déterminer la convexité de la fonction g et tracer dans un repère une courbe possible pour g .

4 Point d'inflexion et dérivée seconde



Propriété 5

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , soit $a \in I$ et soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère du plan.

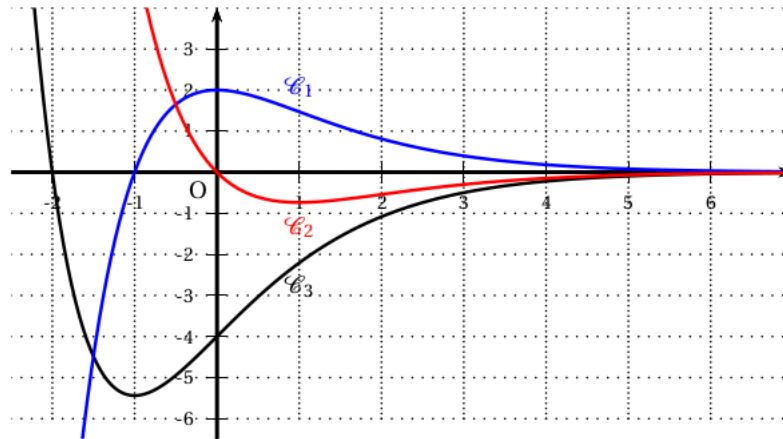
Le point A de coordonnées $(a; f(a))$ est un point d'inflexion de \mathcal{C}_f si et seulement si f'' s'annule en a en changeant de signe.



Capacité 4 Lier une représentation graphique de f , f' ou f''

On considère une fonction f deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

1. Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 ont été représentées. L'une de ces courbes représente la fonction f , une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde. Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f .



2. On admet que pour tout réel x , on a $f(x) = (-2x - 4)e^{-x}$.
 - a. Déterminer des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x .
 - b. En déduire l'étude de la convexité de f et des éventuels points d'inflexions de sa courbe. Vérifier les conjectures établies à la question 1.



Capacité 5 Démontrer une inégalité de convexité, voir capacité 7 p.208

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x}$.

f est dérivable sur \mathbb{R} et on note \mathcal{C}_f sa courbe dans un repère du plan.

1. Déterminer des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x puis étudier la convexité de f sur \mathbb{R} .
2. Déterminer une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
3. En déduire que pour tout réel x , on a $e^{-x} \geq 1 - x$.

5 Thème du programme : modèle défini par une fonction d'une variable

Thème 1 *Fonction de satisfaction*

On appelle fonction « *satisfaction* » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « *satisfaction* » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « *saturation* ».

On définit aussi la fonction « *envie* » comme la fonction dérivée de la fonction « *satisfaction* ». On dira qu'il y a « *souhait* » lorsque la fonction « *envie* » est positive ou nulle et qu'il y a « *rejet* » lorsque la fonction « *envie* » est strictement négative.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction « satisfaction » différent.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « *satisfaction* » g est définie sur l'intervalle $[0; 30]$ par $g(x) = 12,5xe^{-0,125x+1}$ (x est exprimé en jour).

1. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0; 30]$,

$$g'(x) = (12,5 - 1,5625x)e^{-0,125x+1}.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0; 30]$ puis dresser le tableau des variations de g sur cet intervalle.
3. Quelle durée de séjour correspond-elle à l'effet « *saturation* »?

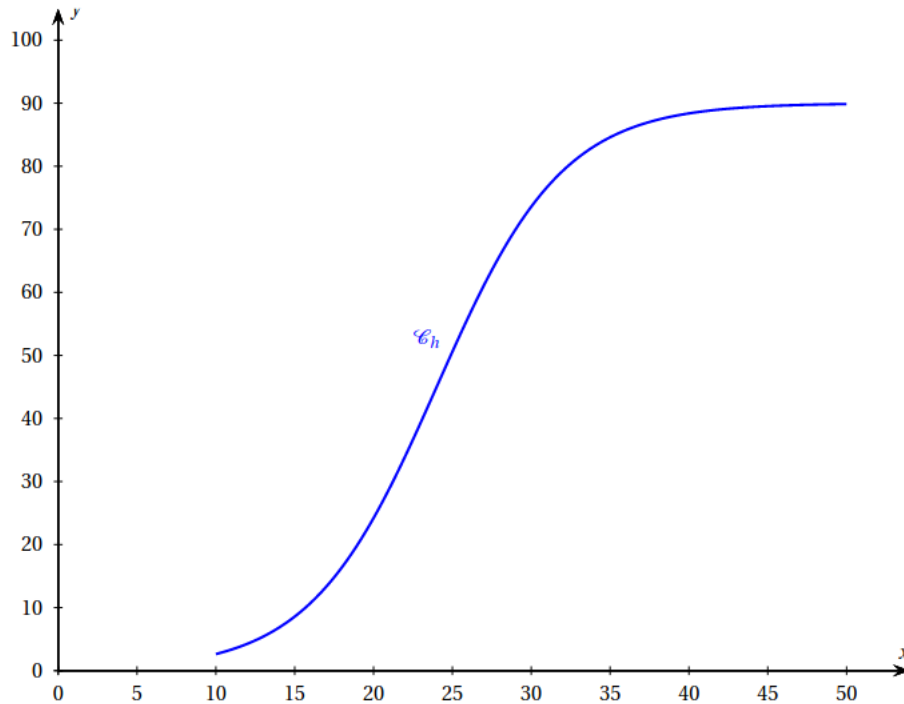
Partie B

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « *satisfaction* » h , est définie sur l'intervalle $[10; 50]$ par

$$h(x) = \frac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$$

(x est exprimé en millier d'euros).

La courbe \mathcal{C}_h de la fonction h est représentée ci-dessous :



Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver($90/(1 + \exp(-0.25 * x + 6))$) $\frac{22,5e^{-0,25x+6}}{(1 + e^{-0,25x+6})^2}$
2	Dériver($22.5 * \exp(-0,25 x + 6)/(1 + \exp(-0,25 * x + 6))^2$) $\frac{5,625e^{-0,25x+6}(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$

1. Donner sans justification une expression de $h''(x)$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[10; 50]$ l'inéquation $e^{-0,25x+6} - 1 > 0$.
3. Étudier la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10; 50]$.
4. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « *envie* » décroît? Justifier.
5. Déterminer, en le justifiant, pour quel salaire annuel la fonction « *satisfaction* » atteint 80.
Arrondir au millier d'euros.

Table des matières

1	Convexité et lecture graphique	1
2	Convexité et sens de variation de f'	3
3	Convexité et signe de la dérivée seconde f''	4
4	Point d'inflexion et dérivée seconde	5
5	Thème du programme : modèle défini par une fonction d'une variable	7