Histoire 1

Louis Augustin Cauchy (1789-1857) est un mathématicien et physicien français, polytechnicien à 16 ans, qui a produit l'une des oeuvres les plus prolifiques de l'histoire. Sa mémoire est entachée par sa négligence à l'égard des travaux des jeunes mathématiciens Abel et Galois, dont il perd les manuscrits. Son **Cours d'analyse** de 1821 est l'un des premiers exposés rigoureux dans ce domaine. Il y énonce et démontre le théorème des valeurs intermédiaires : « *Si la fonction $f(x)$ est continue par rapport à la variable x entres les limites $x = x_0$, $x = X$, et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre $f(x_0)$ et $f(X)$, on pourra toujours satisfaire à l'équation $f(x) = b$ par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X.* » .

1 Continuité d'une fonction

La notion de continuité d'une fonction f traduit mathématiquement le fait que sa courbe représentative peut se tracer sans « trou », sans « lever le crayon ».

1.1 Continuité locale

Définition 1

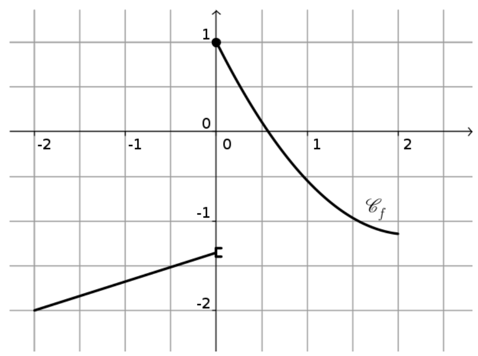
Dire que f est continue au point a, c'est dire que f est définie sur un intervalle contenant a et qu'elle admet une limite en ce point. Cette limite est alors nécessairement $f(a)$.

$$f \text{ continue en } a \text{ équivaut à } \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{ou} \quad \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$$

Capacité 1 ***Étudier la continuité d'une fonction (voir exo 12p.65)***

1. Déterminer les points de continuité et de discontinuité de la fonction représentée ci-contre.
2. Représenter la courbe d'une fonction définie sur l'intervalle $[-2;2]$, telle que $f(-2) > 0$ et $f(2) < 0$ et f ne s'annule pas sur $[-2;2]$.

   f peut-elle être continue sur $[-2;2]$?



Source : Rico602 [CC BY-SA 3.0]

1.2 Continuité globale

Définition 2

On dit qu'une fonction est continue sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si elle est continue en tout point de $\mathbb{R}$ ou de cet intervalle.

Propriété 1 ***Continuité et dérivabilité***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

1. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
2. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Remarque 1

- La réciproque de ce théorème est fausse, comme le prouve le contre-exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$ mais qui n'est pas dérivable en 0 car :

  $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$ est dérivable donc continue sur $]-\infty\,;3[$ et sur $]3\,;+\infty[$.
  On conviendra, dans les tableaux de variations, que les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Propriété 2 ***admise***

1. **D'après la propriété 1, la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle I suffit à prouver sa continuité.**
2. Une fonction peut être continue mais pas dérivable sur un intervalle. Pour le prouver on peut appliquer les règles opératoires suivantes sur les fonctions continues.

   - Les fonctions polynômes et la fonction valeur absolue $x \mapsto |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.
   - Une fonction rationnelle est continue sur chacun des intervalles où elle est définie.
   - Si u et v sont continues sur I, alors $u + v$, $u \times v$ et u^n (pour tout entier naturel n non nul) sont continues sur I
     , $\dfrac{u}{v}$, $\sqrt{u}$, e^u, $\ln(u)$ sont continues sur chaque intervalle où elles sont définies.

La justification de la continuité ou de la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle n'est pas un objectif du programme. Si besoin (Théorème des valeurs intermédiaires), on justifiera brièvement qu'une fonction est continue en disant soit qu'elle est dérivable par règles opératoires, soit qu'elle est continue par règles opératoires si elle n'est pas dérivable sur tout l'intervalle.

2 Continuité et suites

2.1 Image d'une suite par une fonction

Définition 3

Soit une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant tous les termes u_n.
L'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite $\big(f(u_n)\big)$ définie sur $\mathbb{N}$.

Propriété 3

Soit (u_n) une suite qui converge vers un nombre réel ℓ.
Soit I un intervalle qui contient ℓ et tous les termes de la suite (u_n) : pour tout entier naturel n, $u_n \in$ I.
Si f est une fonction continue sur l'intervalle I alors la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers le nombre $f(\ell)$.

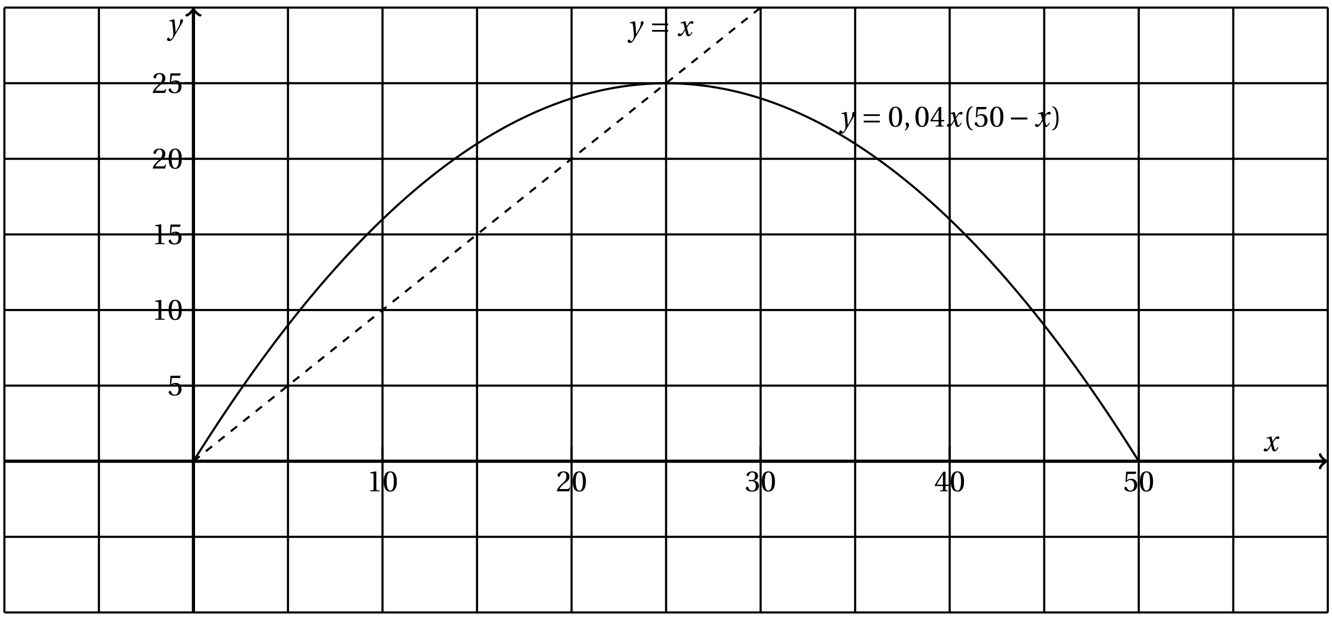
2.2 Étude d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété 4

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers un réel $\ell \in$ I alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ donc est solution sur I de l'équation $f(x) = x$.

Capacité 2 *Étudier une suite définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans un pays X, on note u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant une voiture sans conducteur en l'année 2 035 + n.
On a $u_0 = 10$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0,04u_n(50 - u_n)$.
On a représenté ci-dessous dans un repère orthogonal du plan les courbes d'équations $y = x$ et $y = 0,04x(50 - x)$ sur l'intervalle $[0;50]$.



1. Représenter u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en appliquant cet algorithme de construction :

   - **Étape 1 :** On part du point C_0 sur l'axe des abscisses de coordonnées $(u_0\,;0)$ et on construit le point A_0 de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse u_0 et d'ordonnée $f(u_0) = u_1$.
   - **Étape 2 :** On construit le point B_0 sur la droite d'équation $y = x$ de même ordonnée u_1 que A_0 et d'abscisse u_1.
   - **Étape 3 :** On construit le point C_1 sur l'axe des abscisses de même abscisse que B_0. Les coordonnées de C_1 sont $(u_1\,;0)$ et on commence une nouvelle itération à l'étape 1.

2. **a.** Compléter la fonction Python ci-dessous pour que `autonome(n)` renvoie le terme de rang n de la suite u_n.

```
def autonome(n):
    ............
    ............
    ............
    ............
```

   b. Calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) avec sa calculatrice.
   Peut-on conjecturer que la suite (u_n) converge ? Argumenter.

3. Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,04x(50 - x)$.

   a. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

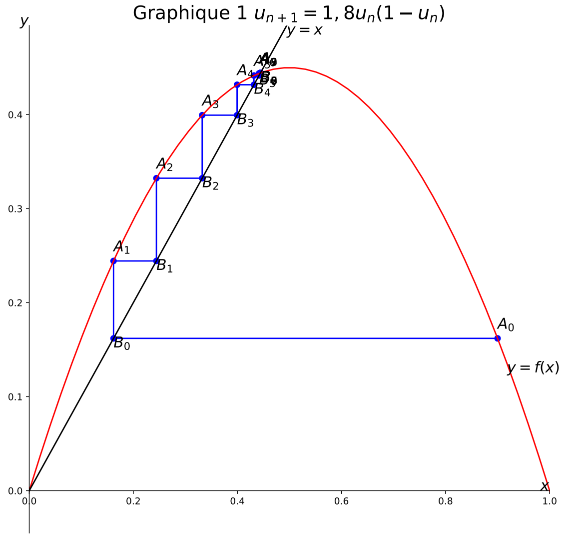
   b. On admet que la suite (u_n) est croissante et converge vers une limite $\ell \geqslant 0$. En appliquant la propriété précédente, déterminer la valeur de ℓ.

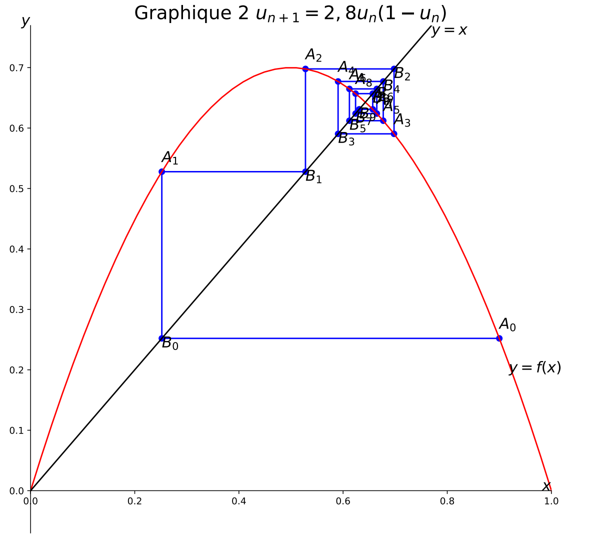
Remarque 2

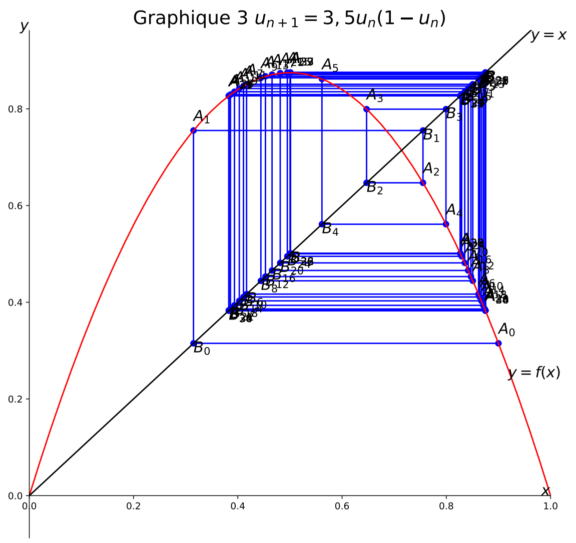
Une suite logistique est une suite définie par une relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mu u_n(1 - u_n)$ avec μ un paramètre fixé.
Les solutions discrètes du modèle d'évolution de population de Verhulst sont des suites logistiques. Extrait de l'article de Wikipedia :

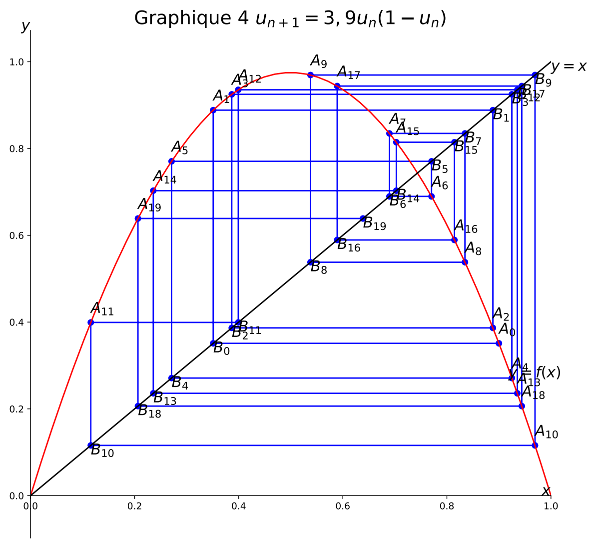
Le modèle de Verhulst imagine que le taux de natalité et le taux de mortalité sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante de la taille de la population. Autrement dit, plus la taille de la population augmente, plus son taux de natalité diminue et son taux de mortalité augmente.

Selon les valeurs du paramètre μ, une suite logistique peut être convergente (graphiques 1 et 2), oscillante entre plusieurs points d'attraction (graphique 3) ou chaotique avec une dépendance très forte aux conditions initiales (graphique 4).







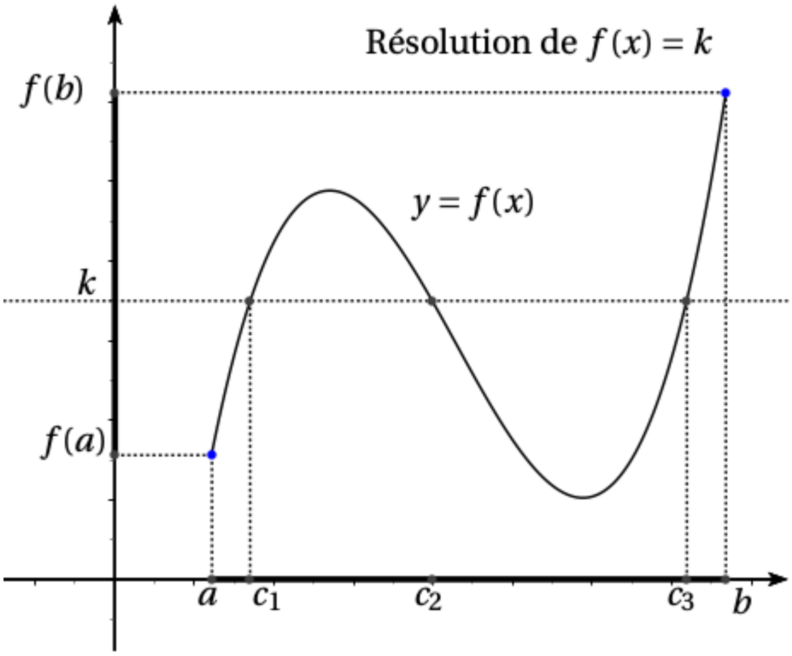


3 Théorème des valeurs intermédiaires

3.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 ***dit TVI, admis***

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Capacité 3 ***Utiliser un théorème d'existence***

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[-1\,;\,6]$. Vérifier graphiquement avec la calculatrice.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

3.2 Fonction strictement monotone

Définition 4

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est **strictement croissante** sur I si pour tous réels a et b dans I, $a < b$ implique $f(a) < f(b)$.
2. f est **strictement décroissante** sur I si pour tous réels a et b dans I, $a < b$ implique $f(a) > f(b)$.
3. f est **strictement monotone** sur I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Propriété 5

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée.

1. (*Hypothèse forte*) Si f' est strictement positive sur I alors f est strictement croissante sur I.
2. (*Hypothèse faible*) Si f' est strictement positive sur I sauf en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur I.
3. (*Hypothèse forte*) Si f' est strictement négative sur I alors f est strictement décroissante sur I.
4. (*Hypothèse faible*) Si f' est strictement négative sur I sauf en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple 1

La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = 3x^2$.
La fonction dérivée f' est strictement positive sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et s'annule en 0 uniquement, d'après la propriété précédente on peut affirmer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

3.3 Corollaires du TVI, application aux fonctions continues strictement monotones

Corollaire ***dit théorème de la bijection, admis***

Si f est une fonction continue strictement monotone sur $[a; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a; b]$.
On dit que f est une bijection de $[a; b]$ dans son intervalle image $f([a; b])$.

Corollaire ***généralisation du précédent aux intervalles ouverts ou semi-ouverts***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, du type $[a; b[$,$]a; b]$, $[a; +\infty[$, $]a; +\infty[$, $]-\infty; b]$ ou $]-\infty; b[$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$(ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$) et $f(b)$(ou $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$), l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans I (qui est unique si la fonction est strictement monotone).

Remarque 3

Par convention, dans un tableau de variation, une flèche oblique indique que la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle considéré.

Capacité 4 *Utiliser le théorème de la bijection avec un tableau de variation, voir exo 20p.69*

On considère la fonction f définie et continue sur $]-\infty;9]$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		2		5		9
$f(x)$	-10	$\nearrow$	5	$\searrow$	$2,5$	$\nearrow$	$+\infty$

Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes sur $]-\infty;9]$.

1. $f(x) = -9$
2. $f(x) = 3$
3. $f(x) = -12$
4. $f(x) = 6$

Capacité 5 *Encadrement d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$ par balayage, voir exos 78 et 79 p.75*

Algorithme

```
Fonction f(x):
   Retourne x³ − 6x² + 6

Fonction balayage():
   x ⟵ 5
   Tant que ... ... ... ... ... ...
      x ⟵ x + 0,1
   Retourne (......, ......)
```

Python

```python
def f(x):
    return x ** 3 - 6 * x ** 2 + 6

def balayage():
    x = 5
    while ..............:
        x = x + 0.1
    return (......, ......)
```

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations complet de f.
3. A l'aide du corollaire du TVI appliqué sur trois intervalles différents, justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement trois solutions.
4. Démontrer que la plus grande solution de $f(x) = 0$ est comprise entre 5 et 6 puis déterminer par balayage un encadrement de cette solution d'amplitude $0,1$ avec un tableau de valeurs sur la calculatrice.
5. Compléter l'algorithme et le programme Python ci-dessus pour qu'elles déterminent par balayage un encadrement d'amplitude $0,1$ de la plus grande solution de $f(x) = 0$.

6. Déduire du tableau de variations de f, son tableau de signes.

Capacité 6

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.
L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.
Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0\,;\,10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
   c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?
   Quelle est alors cette quantité maximale ?
2. a. Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
   On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2\,;\,10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.
   b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
   Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

4 Fonction réciproque

Propriété 6

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle I, à valeur dans un intervalle J.
Il existe une fonction g définie sur J, telle que pour tout réel x de I et tout réel y de J :

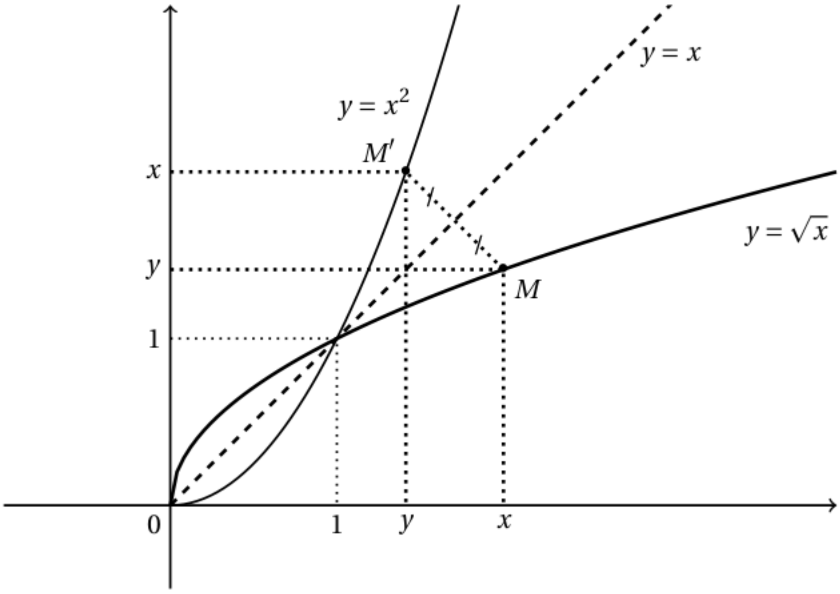
$$\begin{cases} x = g(y) = f^{-1}(y) \\ y \in \mathrm{J} \end{cases} \iff \begin{cases} y = f(x) \\ x \in \mathrm{I} \end{cases}$$

La fonction g est la **fonction réciproque** de f sur I et on note souvent $g = f^{-1}$.

- f et g ont le même sens de variation ;
- Pour tout réel x de I, on a $g(f(x)) = x$ et pour tout réel y de J, on a $f(g(y)) = y$.

- Dans un **repère orthonormé**, les courbes représentatives des fonctions f et g sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple 2



1. La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathrm{J} = [0\,;+\infty[$.

   Pour tout réel $y \geqslant 0$, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $x \geqslant 0$ tel que $y = x^2$, noté $\sqrt{y}$.

   On peut donc définir sur $\mathrm{J} = [0\,;+\infty[$, la fonction racine carré réciproque de la fonction carré f par $g : y \mapsto \sqrt{y}$.

   Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions carré et racine carré sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2. Citer un autre couple (fonction, réciproque) parmi les fonctions au programme du cycle terminal.

Capacité 7 *Déterminer le tableau de variation d'une fonction réciproque*

f est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[-2\,;5]$. On donne son tableau de variation :

x	-2	5
$f(x)$	10 ↘	3

Déterminer l'intervalle de définition et le tableau de variation de sa fonction réciproque f^{-1}.

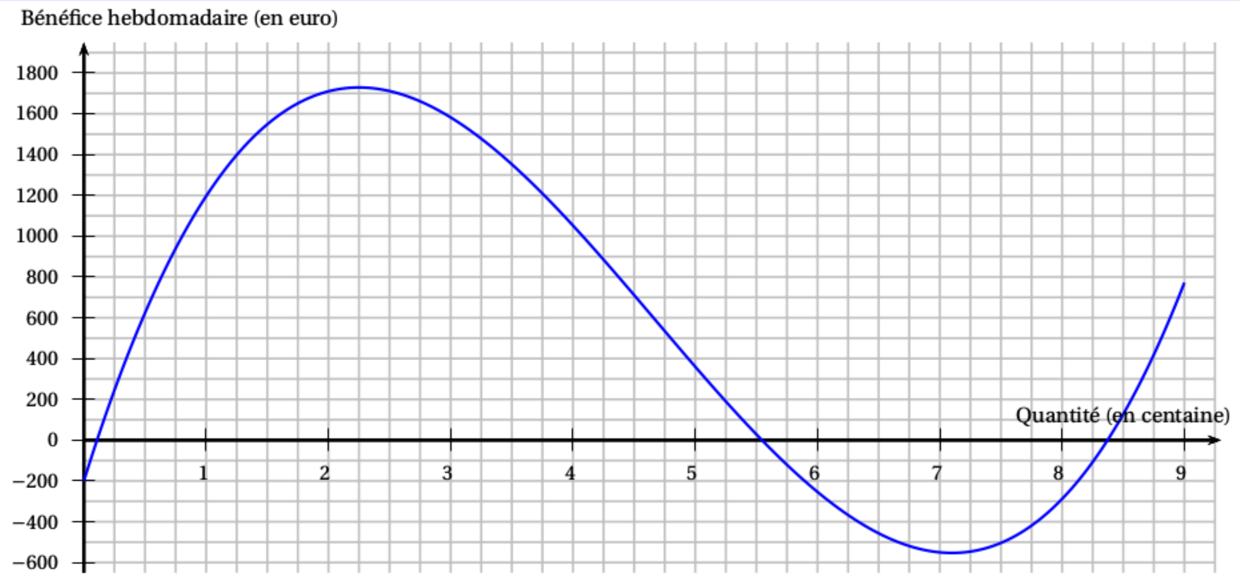
5 Thème du programme : modèle défini par une fonction d'une variable

Thème 1 ***Encadrement d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$ par dichotomie; voir exo 24 p.70***

Une entreprise fabrique et vend des brosses à dents connectées. On modélise le bénéfice en euro pour x centaines de brosses à dents fabriquées et vendues par semaine par la fonction B définie sur $[0;9]$ par :

$$B(x) = 40x^3 - 561x^2 + 1\,917x - 200$$

La courbe représentative du bénéfice hebdomadaire est donnée ci-dessous.



1. Justifier que la fonction B est dérivable sur $[0;9]$ et déterminer l'expression de $B'(x)$.
2. En déduire l'étude des variations de la fonction B sur l'intervalle $[0;9]$.
3. Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[8;8,5]$.
4. Déterminer graphiquement une valeur approchée de α à 25 unités près.
5. Compléter le programme Python ci-dessous pour qu'en sortie de boucle, l'intervalle `[u , v]` constitue un un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à $0,02$.

```
def B(x):
    return 40 * x ** 3 - 561 * x ** 2 + 1917 * x - 200

u = 8
v = 8.5
while v - u > 0.02:
    m = (u + v) / 2
    if B(m) >= 0:
        .... = m
    else:
        .... = m
```

6. Exécuter ce programme en complétant le tableau ci-dessous.

   Chaque exécution du corps de la boucle Tant Que constitue une étape où l'état des variables est relevé à la fin de l'itération, après l'exécution de l'instruction conditionnelle. Pour u et v il s'agit donc des valeurs en sortie de boucle et non des valeurs en entrée de boucle. Il n'est pas forcément nécessaire d'utiliser toutes les colonnes. Noter les valeurs exactes.

	étape 0	étape 1	étape 2	étape 3	…	…	…	…
m	$\varnothing$	$8,25$						
u	8	$8,25$						
v	$8,5$	$8,5$						
$v-u$	$0,5$	$0,25$						

7. En déduire une approximation à l'unité près du nombre minimal de brosses à dents connectés que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice, si sa production hebdomadaire est comprise entre 800 et 850 unités.

Table des matières