Histoire 1

Les liens entre mathématique et physique sont très forts. Hugo Duminil-Copin n'a-t-il pas reçu une médaille Fields en 2022 pour ses travaux en physique mathématique (étude des transitions de phase comme la percolation, la fonte de glace ...) ?
Introduisons ce chapitre par les mots d'Henri Poincaré l'un des derniers grands mathématiciens maîtrisant l'ensemble des champs mathématiques :

> *La physique est écrite dans cet immense livre qui continuellement se tient ouvert devant nos yeux (je veux dire l'univers), mais elle ne peut se comprendre si on ne s'exerce d'abord à comprendre la langue et à connaître les caractères avec lesquels elle est écrite. Elle est écrite en langue mathématique, et les caractères sont les triangles, les cercles et autres figures géométriques, sans lesquelles il est humainement impossible d'en comprendre le moindre mot, sans lesquelles on s'égare vainement dans un labyrinthe obscur.*

Source : `http://serge.mehl.free.fr/chrono/Poincare.html`

1 Dérivée et notation différentielle

Définition 1

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

  En *notation différentielle*, la fonction dérivée f' de f s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ et se lit *dérivée de f par rapport à x*.

- Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

  En *notation différentielle*, la fonction dérivée seconde f'' de f s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ et se lit *dérivée seconde de f par rapport à x*.

Capacité 1 ***Dériver une fonction, utiliser la notation différentielle***

Soit la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$.
f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée première et f'' sa fonction dérivée seconde.

1. Exprimer f' sous la forme différentielle et donner une expression de $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Justifier que pour tout réel x, on a $f''(x) = f(x)$.

Capacité 2 ***Loi horaire, vitesse, accélération***

La loi horaire, en unités du Système International, du mouvement d'un point mobile qui se déplace suivant un axe Ox est, pour un instant t en secondes :

$$x(t) = 10t^2 - 8t + 5$$

1. Exprimer la vitesse $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ de ce point mobile.
2. Exprimer l'accélération $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ de ce point mobile.

2 Fonction logarithme népérien

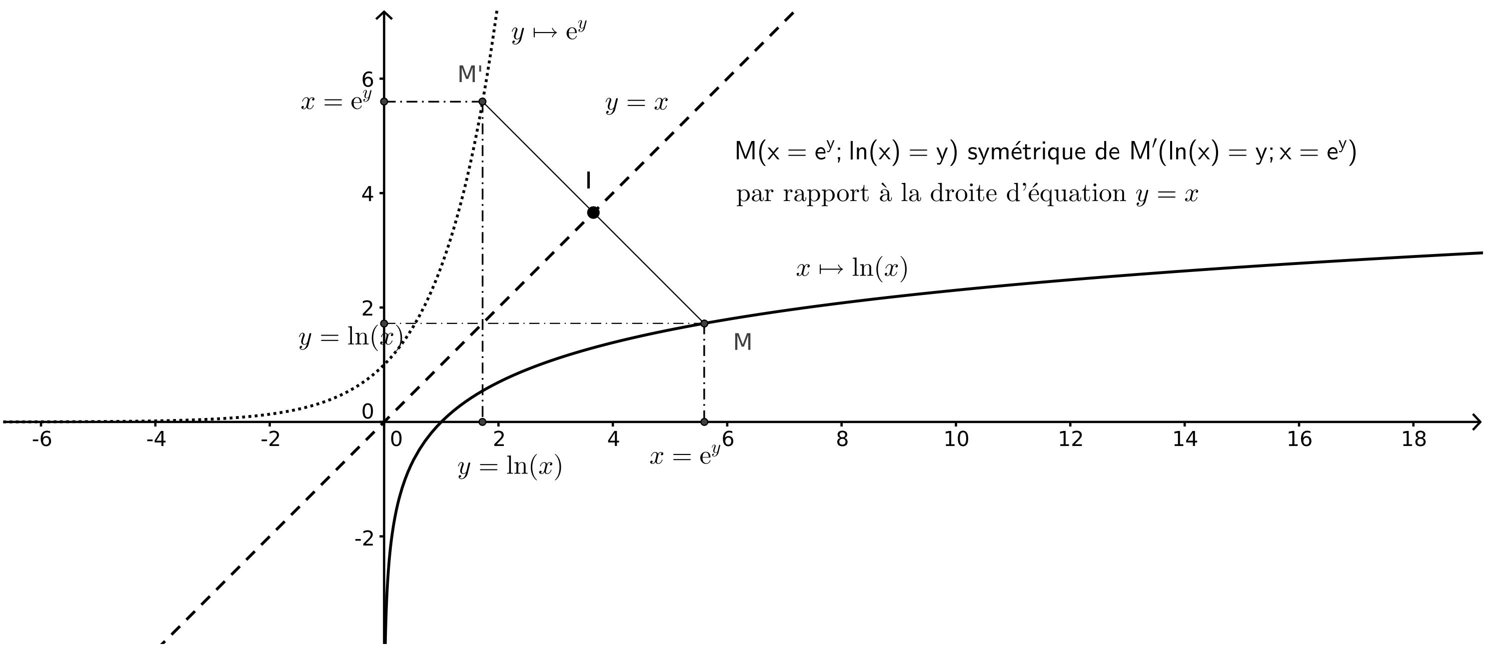
2.1 Définition

Théorème-Définition 1

Pour tout réel $x > 0$ il existe un unique réel y tel que $\mathrm{e}^y = x$, ce réel est le logarithme népérien de x noté $y = \ln x$.
On définit ainsi sur $]0\,;+\infty[$ la fonction logarithme népérien $\ln : x \mapsto \ln x$, c'est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle .

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \ln x = y \iff x = \mathrm{e}^y$$

ne pas confondre les touches $\boxed{\text{Ln}}$ et $\boxed{\text{Log}}$ (qui correspond au *logarithme décimal*, pour tout $x > 0$, $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$).



Corollaire ln ***fonction réciproque de*** exp

1. Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
3. En particulier, on a $\ln(e) = 1$ et $\ln(1) = 0$.
4. Dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Capacité 3 ***Utiliser la fonction logarithme népérien pour simplifier une exponentielle et réciproquement***

1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x un réel.

   a. $e^{x^2} = e^2$ **c.** $e^{2-x} = 0$ **e.** $e^{2-x} = -3$

   b. $e^{2-x} = 1$ **d.** $e^{2-x} = 3$ **f.** $e^{2-x} = e^{x^2}$

2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x un réel strictement positif.

   a. $\ln(x) = 0$ **c.** $\ln(x) = 2$

   b. $\ln(x) = 1$ **d.** $\ln(x) = -2$

2.2 Sens de variation et signe

Propriété 1

☞ La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

☞ On en déduit le tableau de variations de la fonction ln :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

☞ On en déduit le tableau de signes de la fonction ln :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Capacité 4 ***Utiliser la fonction logarithme népérien pour simplifier une exponentielle et réciproquement***

Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x)$.
g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Soit x un réel strictement positif, déterminer une expression de $g'(x)$.
2. Étudier le signe de la fonction g' et en déduire les variations de la fonction g.

2.3 Propriétés algébriques

Propriété 2 ***Équation fonctionnelle***

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}$$

On dit que la fonction ln vérifie **l'équation fonctionnelle** $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Corollaire ***admis***

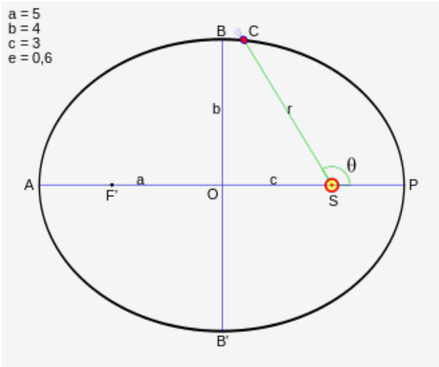
Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, pour tout entier relatif n :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left(a^n\right) = n\ln(a) \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Capacité 5 ***Troisième loi de Kepler***

Soit une planète de masse m en orbite autour d'une étoile de masse M.
Kepler a découvert dans sa première loi que l'orbite de la planète est une ellipse. Notons a son demi-grand axe.



Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Lois_de_Kepler

La troisième loi, dite *loi des aires*, qu'il a mis en évidence par ses observations, s'énonce ainsi :

> *Le carré de la période sidérale T d'une planète (temps entre deux passages successifs devant une étoile) est directement proportionnel au cube du demi-grand axe a de la trajectoire elliptique de la planète.*

Newton a ensuite établi un lien avec sa théorie de la gravitation universelle.

- T est la période de révolution de la planète,
- a est le demi grand axe de la trajectoire elliptique,
- G est la constante de la gravitation universelle,
- m est la masse de la planète,
- M est la masse de l'étoile.

La formule de Newton a été décomposée en lui appliquant le logarithme népérien :

$$2\ln(T) - 3\ln(a) = \ln(4) + 2\ln(\pi) - \ln(G) - \ln(M+m)$$

Retrouver une relation entre T, a, M, m, G et π où n'apparaît pas la fonction ln.

2.4 Fonctions composées $x \mapsto \ln(u(x))$ et logarithme décimal

Propriété 3 ***admise***

Soit $\boldsymbol{u}$ une fonction définie sur un intervalle I qui est dérivable et strictement positive sur I.
La fonction composée définie sur I par $\boldsymbol{g(x) = \ln(u(x))}$ est dérivable sur I et on a :

$$\text{pour tout } \boldsymbol{x} \in \mathrm{I} \text{ on a } \boldsymbol{g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

On en déduit que les fonctions u et $g = \ln(u)$ suivent les mêmes variations sur l'intervalle I.

Capacité 6 *Datation au carbone 14*

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone employé en archéologie pour dater la matière organique retrouvée lors de fouilles.
La formule suivante donne l'âge T, en années, d'un échantillon extrait lors de fouilles archéologiques, en fonction du pourcentage p % de carbone 14 qu'il contient :

$$T = 8264 \ln\left(\frac{100}{P}\right)$$

1. Dans quel intervalle I varie p ?
2. Démontrer que la fonction T est décroissante sur l'intervalle I.
3. On a détecté 5 % de carbone 14 dans une squelette ancien qui semble très ancien.
   Estimer l'âge du squelette. Arrondir à la centaine d'années.
4. La datation au carbone 14 a permis d'estimer l'âge d'une momie à 2500 ans.
   Quel pourcentage de carbone 14 contient-elle encore ? Arrondir à l'unité.

Capacité 7 *Équation d'un gaz parfait et dérivée logarithmique*

L'équation d'état d'un gaz parfait relie différentes grandeurs macroscopiques qui permettent de le décrire :

- sa pression P en *pascals*
- son volume V en m^3
- la quantité de matière n (en moles)
- la température T en *kelvins*

$$\boxed{PV = nrT} \text{ où } r \text{ est une constante}$$

Fixons la quantité de matière n, les grandeurs $P(t)$, $V(t)$ et $T(t)$ sont des fonctions dérivables par rapport au temps t.

1. Soit t un temps fixé, établir une relation entre $\ln(P(t))$, $\ln(V(t))$ et $\ln(T(t))$.
2. Toujours pour un temps t fixé, en déduire une relation entre $P(t)$, $P'(t)$, $V(t)$, $V'(t)$, $T(t)$ et $T'(t)$.

2.5 Logarithme décimal

Définition 2

La fonction logarithme décimal de x est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.
En particulier on a $\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$.

Propriété 4

1. La fonction logarithme décimal est dérivable et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

   Pour tout réel $x>0$, on a $\log'(x)=\dfrac{1}{x\ln(10)}$.

2. Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier relatif n :

   - $\log(ab)=\log(a)+\log(b)$
   - $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$
   - $\log\left(10^n\right)=n$
   - $\log\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\log(a)$
   - $\log\left(a^n\right)=n\log(a)$
   - $\log\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\log(a)$

3. Pour tout réel y et tout réel $x>0$ on a $\quad 10^x=y \Longleftrightarrow x=\log(y)$

Capacité 8 ***utiliser la fonction logarithme décimal***

1. Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=-\log(x)$.
   a. Déterminer l'image de $x=10^{-3}$ par la fonction f.
   b. Déterminer l'antécédent de 4 par la fonction f.
2. En chimie, le caractère acido-basique d'une solution se mesure avec un indicateur noté **pH** :

$$\mathrm{pH}=-\log[\mathrm{H_3O^+}]$$

   $[\mathrm{H_3O^+}]$ est la concentration des ions hydronium exprimée en $\mathrm{mol.L^{-1}}$.
   a. Pour un acide on a : $1<\mathrm{pH}<7$. En déduire la concentration en ions $\mathrm{H_3O^+}$ d'un acide.
   b. Pour une base on a : $7<\mathrm{pH}<14$. En déduire la concentration en ions $\mathrm{H_3O^+}$ d'une base.
   c. Pour la sang, on a : $[\mathrm{H_3O^+}]=3,98\times10^{-8}\ \mathrm{mol.L^{-1}}$. Montrer que le sang est légèrement basique.

3 Équations différentielles

3.1 Équation différentielle

Définition 3

- Une **équation différentielle** est une équation définie sur un intervalle I où l'inconnue est une fonction dérivable sur I et où interviennent des dérivées de cette fonction.
- **Résoudre** une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble des fonctions solutions de l'équation.
- Une convention usuelle est de noter y la fonction inconnue d'une équation différentielle et y', y'' etc …ses dérivées successives.

  De plus dans l'écriture d'une équation différentielle, on omet généralement x pour les fonctions y et y'. Ainsi l'équation définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par $y'(x)=2y(x)+x-1$ peut s'écrire

$y' = 2y + x - 1.$

Capacité 9 ***Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle ⇒ exo 1 p.121***

On considère l'équation différentielle (E) définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E)\ :\ y' - 3y = 2$$

1. Vérifier que les fonctions suivantes sont solutions de l'équation E :

- **a.** f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{2}{3}$.
- **b.** g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 6\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{2}{3}$.

2.
- **a.** Soit k une constante réelle, démontrer que la fonction h_k définie sur $\mathbb{R}$ par $h_k(x) = k\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{2}{3}$ est solution de l'équation E.
- **b.** Déterminer la constante k pour que la fonction h_k vérifie $h_k(0) = 5$.

3.2 Équation différentielle $y' = ay$

Théorème 2

Soit a un réel non nul.
L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$ où C est une constante réelle.

Capacité 10

Un échantillon contient initialement $N_0 = 3 \times 10^9$ noyaux radioactifs dont la constante radioactive est λ.
Le nombre de noyaux radioactifs encore présents à l'instant t est noté $N(t)$ et vérifie l'équation différentielle :

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

Exprimer $N(t)$ en fonction de λ et t

3.3 Équation différentielle $y' = ay + b$

Théorème 3

Soit a (avec $a \neq 0$) et b deux constantes réelles.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $(E)\ :\ y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec C une constante réelle.

Capacité 11 *Résolution d'une équation différentielle* $y' = ay + b$

Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $y' = -4y + 8$ avec la condition initiale $y(0) = 4$.

Capacité 12 *Loi de Newton*

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Avant l'arrivée des bouteilles isothermes en acier, les gourdes étaient souvent de simples bouteilles en aluminium anodisé. Un randonneur remplit une telle gourde, de masse $m_1 = 172$ g, d'une d'une boisson chaude de masse $m_2 = 750$ g à la température $\theta_1 = 50°$C. La température de l'air extérieur est $\theta_e = 5°$C, supposée constante : l'air extérieur est un thermostat. On considère le système boisson et gourde comme un système incompressible de température uniforme, de surface $S = 4,0 \times 10^{-2}\ \text{m}^2$.
La température de la boisson suit la loi de refroidissement de Newton. Celle-ci stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
Soit t un temps en secondes, la température $\theta(t)$ de la boisson est ainsi solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad \theta'(t) = -\frac{h \times S}{(m_1 + m_2) \times c} \times \theta(t) + \frac{h \times S}{(m_1 + m_2) \times c} \times \theta_e$$

- h est le coefficient d'échange convectif dans l'air égal à 10 Watts par mètre carré et par degré Celsius.
- c est la capacité thermique massique du système étudié égale ici à $3,6 \times 10^3$ Joules par kilogramme par degré Celsius.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) et déterminer une expression de la température $\theta(t)$ de la boisson à un instant t.
2. Calculer la température de la boisson dans la bouteille au bout de 2 heures.

Source : http://serge.mehl.free.fr/chrono/Newton.html

Table des matières

1 Dérivée et notation différentielle 1

2 Fonction logarithme népérien 2
2.1 Définition . . . 2
2.2 Sens de variation et signe . . . 3
2.3 Propriétés algébriques . . . 4
2.4 Fonctions composées $x \mapsto \ln(u(x))$ et logarithme décimal . . . 5
2.5 Logarithme décimal . . . 6

3 Équations différentielles 7
3.1 Équation différentielle . . . 7
3.2 Équation différentielle $y' = ay$ . . . 8
3.3 Équation différentielle $y' = ay + b$ . . . 8