**Histoire 1**

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813 ) est un mathématicien et physicien français dont les travaux portèrent dans tous les domaines mathématiques. Il nous a laissé en particulier la notation $f'(x)$ pour la fonction dérivée, la notation indicielle $u_n$ pour les suites et le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction. En arithmétique des entiers, il résolut la difficile équation de Pell $x^2 - ay^2 = \pm 1$ en introduisant les fractions continues. Après avoir succédé à Euler à l'Académie des sciences de Berlin, il siégea dans la commission du système métrique sous la Révolution, il est inhumé au Panthéon.

# 1 Rappels sur la dérivation

## 1.1 Nombre dérivé et tangente

**Définition 1**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I, $a$ un réel appartenant à I et $h$ un réel différent de 0 tel que $a+h$ appartient à I.

**$f$ est dérivable en $a$ si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, le taux d'accroissement de $f$ entre $a$ et $a+h$, tend vers un nombre lorsque $h$ tend vers 0.**

Ce nombre est le **nombre dérivé** ou **dérivée** de $f$ en $a$, il est noté $f'(a)$.

C'est la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque $h$ tend vers **0** et on note : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)}$.

Si $y = f(x)$ on peut utiliser la notation de Leibniz $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pour la dérivée $f'(x)$ de $f$ en $x$.

**Définition 2**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I, soit $a$ un réel appartenant à I et $h$ un réel non nul tel que $a+h$ appartient à I.
On considère les points $A\big(a\,;\, f(a)\big)$ et $M_h\big(a+h\,;\, f(a+h)\big)$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan.
Si $f$ **est dérivable en** $a$, lorsque $h$ tend vers 0, les sécantes $(AM_h)$ à $\mathscr{C}_f$ tendent vers une position limite qui est la droite passant par le point $\mathrm{A}\big(a\,;\, f(a)\big)$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Cette droite, « **limite des sécantes** », est appelée **tangente à $\mathscr{C}_f$ en A**$\big(a\,;\, f(a)\big)$.

**Propriété 1**

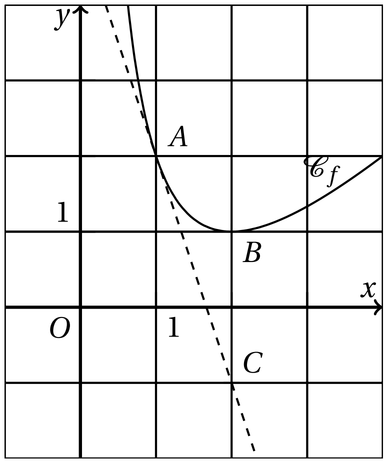
Soit $f$ une fonction dérivable en $a$, une équation réduite de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $a$ est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

$f'(x)$ est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $a$.

**Capacité 1** ***Déterminer graphiquement un nombre dérivé et une équation de tangente, exo résolu 1 p.89***

On considère une fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ et dérivable en 1 et en 2. On a représenté ci-contre la courbe de $f$ et ses tangentes aux points $A$ et $B$ d'abscisses respectives 1 et 2.




**1.** Le nombre dérivé de $f$ en 2 a pour valeur :

**a.** 2 **b.** 1 **c.** 0 **d.** $\frac{1}{2}$

**2.** Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A$ est :

**a.** $y=-\frac{1}{3}x+2$ **b.** $y=3x+\frac{5}{3}$ **c.** $y=5-3x$ **d.** $y=-3x+\frac{5}{3}$

## 1.2 Fonction dérivable sur un intervalle

**Définition 3**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I. Si $f$ est dérivable en tout point $a$ de I, on dit que $f$ est dérivable sur I, et on appelle **fonction dérivée** de $f$, notée $f'$, la fonction $f'$ définie par :

$$\boxed{f' : a \mapsto f'(a)}$$

**Capacité 2** ***Déterminer une équation de tangente, connaître des exemples de fonctions non dérivables en un point***

**1.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$. On rappelle que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel $x$, on a $f'(x) = f(x)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de $f$ dans un repère du plan.

- **a.** Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- **b.** Représenter graphiquement $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ avec sa calculatrice.
  Quelle conjecture peut-on faire sur les positions relatives de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}_f$ ?
- **c.** Démontrer cette conjecture.

2. Est-il vrai que si une fonction $g$ est définie sur un intervalle I alors $g$ est dérivable sur I ?

### 1.3 Dérivées des fonctions usuelles

*$f$ est une fonction dérivable sur $\mathscr{D}$ par rapport à la variable $x$*

| Fonction $f$ | Fonction dérivée $f'$ | Ensemble $\mathscr{D}$ de dérivabilité de $f$ |
|---|---|---|
| $f(x)=p$ avec $p\in\mathbb{R}$ | $f'(x)=0$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x)=mx+p$ avec $(m,p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ | $f'(x)=m$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x)=x^2$ | $f'(x)=2x$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x)=x^n$ avec $n\in\mathbb{N}$ | $f'(x)=nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x)=\dfrac{1}{x}$ | $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$ | $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ |
| $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ avec $n\in\mathbb{N}$ | $f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$ | $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ |
| $f(x)=\sqrt{x}$ | $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0\,;+\infty[$ |
| $f(x)=\mathrm{e}^x$ | $f'(x)=\mathrm{e}^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x)=\ln(x)$ | $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ | $]0\,;+\infty[$ |

TABLE 1 – Dérivées des fonctions usuelles (à compléter en cours d'année)

### 1.4 Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

*Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables par rapport à la variable $x$ sur un intervalle I*

| Opération sur $u$ et $v$, $f=$ | Fonction dérivée $f'=$ | Ensemble de dérivabilité de $f$ |
|---|---|---|
| $u+v$ | $u'+v'$ | I |
| $\lambda u$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ | $\lambda u'$ | I |
| $uv$ | $u'v+uv'$ | I |
| $\dfrac{1}{v}$ | $\dfrac{-v'}{v^2}$ | I privé des réels $x$ tels que $v(x)=0$ |
| $\dfrac{u}{v}$ | $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ | I privé des réels $x$ tels que $v(x)=0$ |

TABLE 2 – Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

**Capacité 3** ***Dériver une somme, un produit, un inverse ou un quotient de fonctions dérivables***

Soit les fonctions $f$ et $g$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel $x$, on a :

$$f(x)=\frac{x^6}{3}-2x+1 \quad \text{et} \quad g(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}$$

Déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$ :

1. $f \times g$
2. $g^2$
3. $\dfrac{-2}{g}$
4. $\dfrac{f}{g}$

## 2 Compléments sur la dérivation

**Propriété 2** ***Dérivées de fonctions composées, admise***

1. Si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $u^2$ est dérivable sur I et on a
$$\boxed{(u^2)' = 2u'u}$$
2. Si $u$ est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction composée $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et on a
$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$
3. Si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $\mathrm{e}^u$ est dérivable sur I et on a
$$\boxed{(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u}$$
4. Si $u$ est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction composée $\ln(u)$ est dérivable sur I et on a
$$\boxed{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$$

**Capacité 4** ***Appliquer des formules de dérivation de fonctions composées, exo résolu 2 p. 89***

1. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction $h$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x$, $h(x) = \left(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}\right)^2$.
2. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction $g$ dérivable sur $]-0,25\,;+\infty[$ telle que pour tout réel $x > -0,25$, $g(x) = \sqrt{4x+1}$.
3. On considère la fonction $f$ définie sur $\left]-\frac{1}{5}\,;\frac{3}{2}\right[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{3-2x}{5x+1}\right)$. Justifier que $f$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{5}\,;\frac{3}{2}\right[$ et déterminer une expression de $f'(x)$.

## 3 Étude des variations d'une fonction

### 3.1 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

**Théorème 1** ***admis***

Soit $f$ une fonction monotone et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

*Compléter par* $\leqslant$, $=$ *ou* $\geqslant$.

- Si $f$ est croissante sur I alors pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a $f'(x) \cdots 0$.
- Si $f$ est décroissante sur I alors pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a $f'(x) \cdots 0$.

**Théorème 2** ***admis, réciproque du précédent***

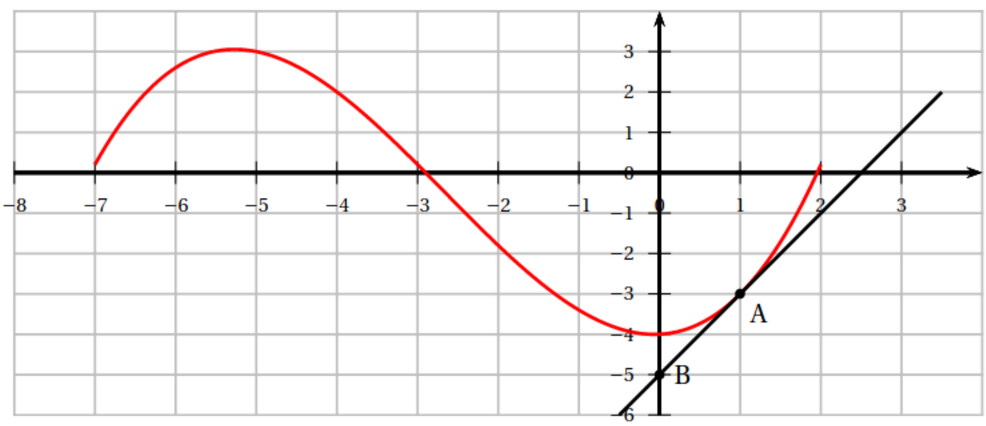
Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

*Compléter par* $\leqslant$, $=$ *ou* $\geqslant$.

- Si pour tout réel $x$ de I on a $f'(x) \cdots 0$ alors alors $f$ est croissante sur I.
- Si pour tout réel $x$ de I on a $f'(x) \cdots 0$ alors alors $f$ est décroissante sur I.

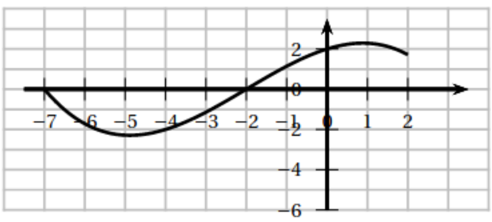
**Capacité 5** ***Exploiter le lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction***

La courbe ci-dessous représente une fonction $g$ définie et dérivable sur l'intervalle $[-7\ ;\ 2]$.
La tangente au point A$(1\ ;\ -3)$ coupe l'axe des ordonnées au point B$(0\ ;\ -5)$.

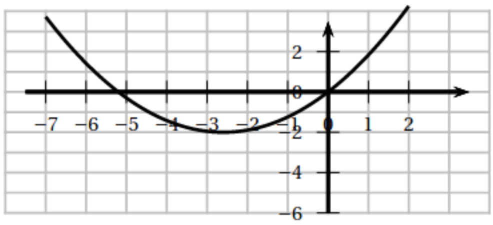



1. L'une des quatre courbes suivantes représente la fonction $g'$ dérivée de la fonction $g$.
   Laquelle ?

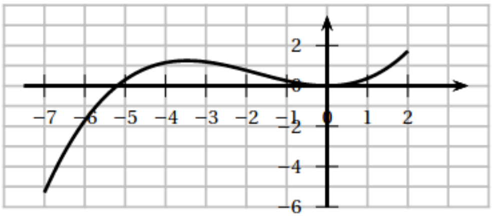
**a.**



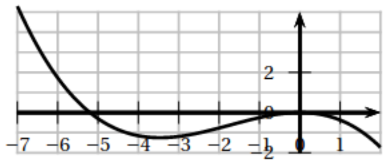
**b.**



**c.**



**d.**



**2.** L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction $g$ au point A est :

**a.** $y = -3x + 1$ **b.** $y = x - 5$ **c.** $y = 2x - 5$ **d.** $y = x - 4$

## 3.2 Dérivée et recherche d'extremum

### Définition 4

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- $f$ admet un **maximum local** en $a$ s'il existe un intervalle J inclus dans I et contenant $a$, tel que pour tout $x \in \mathrm{J}$, $f(x) \leqslant f(a)$.

  $f$ admet un **maximum global** en $a$ si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leqslant f(a)$.

- $f$ admet un **minimum local** en $a$ s'il existe un intervalle J inclus dans I et contenant $a$, tel que pour tout $x \in \mathrm{J}$, $f(x) \geqslant f(a)$.

  $f$ admet un **minimum global** en $a$ si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \geqslant f(a)$.

### Propriété 3 *Condition nécessaire, condition suffisante pour avoir un extremum local*

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $a$ un réel appartenant à I.

☞ **Condition nécessaire d'extremum local** Si $f$ atteint un extremum local en un réel $a$ qui n'est pas une borne de I, alors $f'(a) = 0$.

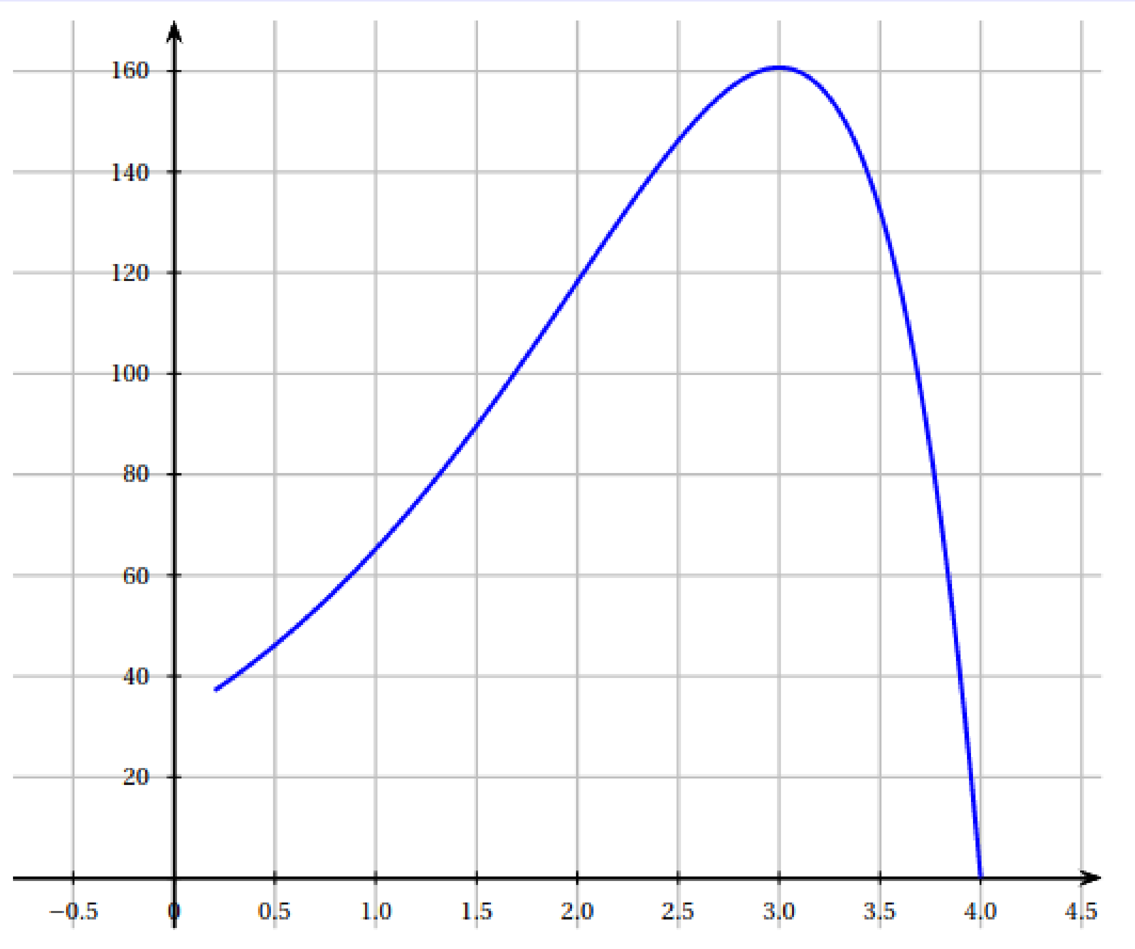
☞ **Condition suffisante d'extremum local** Si $f'$ s'annule en changeant de signe en $a$, alors $f$ atteint un extremum local en $a$.

**Thème 1** ***Thème modèle défini par une fonction d'une variable, résolution d'un problème d'optimisation, exos résolus 1 et 2 p. 61***

Un rameur est une machine d'exercice physique simulant les mouvements d'une personne qui fait de l'aviron.
Il est souvent utilisé pour l'entraînement sportif afin d'améliorer sa condition physique.
La courbe ci-dessous représente la puissance (en Watt) en fonction du temps (en dixième de seconde) développée par un rameur débutant.

**Partie A** : Répondre par lecture graphique aux deux questions suivantes

1. Quelle est la puissance maximale atteinte par ce rameur ?
2. Pendant combien de temps la puissance développée reste-t-elle au-dessus de 100 Watts ?




**Partie B** : Modélisation par une fonction

On suppose que la courbe est la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0,2\ ;\ 4]$ par :

$$f(x) = (-8x + 32)e^{x}.$$

On note $f'$ la fonction dérivée de $f$. On admet que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0,2\ ;\ 4]$,

1. Démontrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0,2\ ;\ 4]$, $f'(x) = (-8x + 24)e^{x}$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de $f$ sur $[0,2\,;\,4]$.

3. Déterminer la valeur exacte du maximum de la fonction $f$.

4. On suppose que le sportif améliore sa meilleure performance de 5 % tous les mois. Combien de mois d'entraînement seront-ils nécessaires pour qu'il dépasse les 200 W ?

### 3.3 Dérivée seconde

**Définition 5**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée $f'$ est aussi dérivable sur I. On appelle **dérivée seconde de** $f$ et on note $f''$ ou $f^{(2)}$ la dérivée de $f'$.

**Capacité 6** ***Utiliser la dérivée seconde et les dérivées d'ordre supérieur***

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$.

1. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer $f'$ et $f''$.

2. Étudier les variations de $f'$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(-1)$.

3. En déduire le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

## Table des matières