Thème *Modèles d'évolution*

L'atmosphère terrestre contient de l'azote qui est transformé sous l'effet du rayonnement cosmique en carbone 14 radioactif noté ^{14}C. Les êtres vivants contiennent donc du carbone 14 qui est renouvelé constamment. À leur mort il n'y a plus d'emprunt de carbone 14 à l'extérieur et le carbone 14 qu'ils contiennent se désintègre. Le temps écoulé depuis la mort d'un être vivant peut donc être évalué en mesurant la proportion de carbone 14 qu'il lui reste.
Des expériences de comptage permettent de conjecturer la **loi de décroissance radioactive** sous la forme suivante : « la proportion de noyaux radioactifs d'un échantillon se désintégrant sur une courte durée est proportionnelle à la fois à la proportion de noyaux présents à l'instant initial et à la durée d'observation. »

Méthode

On note $u(t)$ la proportion restante d'atomes de carbone 14 à l'instant t après la mort d'un être vivant (exprimé en milliers d'années) dans un échantillon de matière organique.
Dans le cas où ma durée d'observation est petite par rapport à la durée de vie des noyaux, ceci peut s'écrire sous la forme de la **relation 1** :

$$u(t+d)-u(t)=-kd\,u(t)$$

t désigne l'instant du début de l'observation, d la durée de l'observation et k un nombre réel positif.
On obtient $k=0,124$ et $u(0)=0,153$ à la suite d'observations.

1 Partie A : Modèle discret

On pose $d=1$ (1 millier d'années) et on modélise cette loi de décroissance radioactive par la suite (u_n) telle que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, on a :

$$u_{n+1}-u_n=-0,124u_n$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique et déterminer sa raison.
2. Soit n un entier naturel, exprimer u_n en fonction de n.
3. D'après ce modèle, au bout de combien de milliers d'années, la concentration en carbone 14 de l'organisme devient inférieure à 0,3 % de sa valeur initiale ?

2 Partie B : Modèle continu

1. En faisant tendre d vers 0 dans la *relation 1*, expliquer pourquoi la fonction u qu'on suppose dérivable sur $[0\,;+\infty[$ vérifie, pour tout réel $t \geqslant 0$:
$$u'(t)=-0,124t$$
2. Donner l'ensemble des fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$ solutions de l'équation différentielle **(E)** :
$$y'=-0,124y$$
3. Déterminer la solution u de l'équation **(E)** vérifiant la condition initiale $u(0)=0,153$.
4. On appelle période (ou demi-vie) du carbone 14, le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés. Déterminer la demi-vie du carbone 14, arrondie à l'année (on rappelle que t est en milliers d'années).
5. Déterminer la limite de la fonction u en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
6. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os présentant une concentration en carbone 14 de 7,27 % de la concentration initiale.

   Justifier que l'on peut estimer l'âge de ce fragments d'os à 6000 ans.
7. Quand la concentration en carbone 14 d'un organisme devient inférieure à 0,3 % de sa valeur initiale, on ne peut pas dater raisonnablement à l'aide du carbone 14.

   Dans le modèle continu, déterminer le nombre d'années après la mort d'un organisme au bout duquel un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.

   On arrondira au millier d'années. Comparer avec le résultat de la question 3. de la partie A.