Nom : .... Prénom : ....

Rendre l'énoncé avec la copie.

Thème ***Modèles définis par une fonction d'une variable***
Étude de différents coûts.

Méthode

Le directeur financier d'une entreprise peut s'intéresser à différents types de coûts :

1. Le **coût total** correspond à tout ce que l'entreprise a dû dépenser pour réaliser sa production ;
2. Le **coût marginal** est le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite ;
   En pratique pour un coût total $C(x)$, le coût marginal $C_m(x)$ est $\dfrac{C(x+1)-C(x)}{1}$. Si la fonction C est dérivable en x, on approche le coût marginal $C_m(x)$ par le nombre dérivé $C'(x)$.
   $$\boxed{C_m(x) \approx C'(x)}$$
3. Le **coût moyen** (ou **coût unitaire**) d'un objet est le coût total divisé par le nombre d'objets produits.

Une entreprise fabrique chaque jour entre 1000 et 2500 pièces pour des trottinettes électriques. Toutes les pièces fabriquées sont identiques et on estime que le coût total, en centaines d'euros, de la production de x centaines de pièces est défini par :

$$C(x) = x + 2 - \ln(x) \quad \text{pour tout } x \in [1\,;25]$$

La fonction C est dérivable sur $[1\,;25]$.

Partie A : étude du coût marginal

1. Déterminer le coût total de fabrication de 100 pièces. Donner le résultat à l'euro près.
2. **a.** Soit $x \in [1\,;25]$, déterminer l'expression du coût marginal $C_m(x) = C'(x)$.
   b. En déduire le tableau de variation de la fonction C sur l'intervalle $[1\,;25]$.

Partie B : étude du coût moyen

Pour x centaines de pièces fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce, en euros, est donné par la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x + 2 - \ln(x)}{x}$$

La fonction f est dérivable sur $[1\,;25]$.

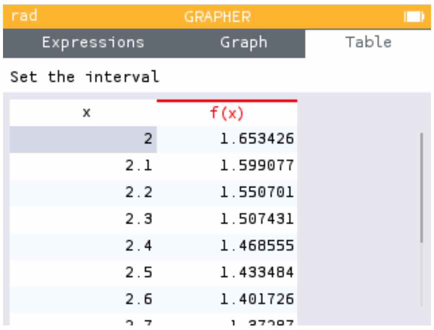
1. Calculer le coût moyen d'une pièce, arrondi au centime d'euro près, si 1000 pièces sont fabriquées.
2. **a.** Soit $x \in [1\,;25]$, démontrer que $f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 3}{x^2}$.
   b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;25]$.
   Dresser son tableau de variations et préciser des valeurs approchées au dixième de $f(1)$ et $f(25)$.
   c. Déterminer à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal.
   d. Déterminer alors ce coût moyen, arrondi au centime d'euros près. En déduire le coût total correspondant.

3. Il est trop risqué pour l'entreprise de produire uniquement la quantité conduisant à un coût moyen minimal par pièce. Le directeur financier souhaite déterminer la plage de production pour laquelle le coût moyen de fabrication d'une pièce est inférieur ou égal à 1,5 euros.

On admet que l'équation $f(x) = 1{,}5$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;25]$.

On veut déterminer un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = 1{,}5$.

a. On donne ci-dessous un tableau de valeurs de $f(x)$ pour x allant de 2 à 3 avec un pas de 0,1. En déduire un encadrement de α d'amplitude 0,1.



x	f(x)
2	1.653426
2.1	1.599077
2.2	1.550701
2.3	1.507431
2.4	1.468555
2.5	1.433484
2.6	1.401726

b. On considère le programme Python ci-dessous :

```python
from math import log

def f(x):
    return (x + 2 - log(x)) / x

def encadrement_balayage():
    x = 1
    while f(x) ... 1.5:
        x = ......
    return [......, .........]

def encadrement_dichotomie():
    gauche = 1
    droite = 3
    while droite - gauche ...... 0.01:
        milieu = (gauche + droite) / 2
        if f(milieu) > 1.5:
            gauche = ..............
        else:
            droite = ..............
    return [gauche, droite]
```

- Complétez la fonction `encadrement_balayage()` pour qu'elle détermine un encadrement de α d'amplitude 0,01 par balayage.
- Complétez la fonction `encadrement_dichotomie()` pour qu'elle détermine un encadrement de α d'amplitude 0,01 par dichotomie.

```
>>> encadrement_balayage()
[2.3099999999999943, 2.319999999999994]
>>> encadrement_dichotomie()
[2.3125, 2.3203125]
```