Exercice 1

Déterminer les limites suivantes par application des règles opératoires en détaillant les étapes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\mathrm{e}^{x}}{1-\mathrm{e}^{x}}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x :

$$f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 18x - 1$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ en appliquant la règle opératoire de somme.
2. Peut-on déterminer de la même façon la limite de f en $+\infty$?
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en choisissant une méthode adaptée.
4. On note f' la fonction dérivée de f, déterminer une expression de $f'(x)$ pour tout réel x.
5. Dresser le tableau de variation complet de f en précisant les valeurs des extrema locaux et les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

Exercice 3

On considère une fonction f définie sur $]-3\,;+\infty[$ dont on donne le tableau de variations ci-dessous :

x	-3		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

1. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
   Déterminer les équations des éventuelles asymptotes à $\mathscr{C}_f$ en justifiant à l'aide des limites de f lues dans le tableau de variation.
2. On définit sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$ la fonction g par $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$.
   Déterminer les limites de g en -3 et en $+\infty$. Justifier précisément.

Exercice 4

Soit u une fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ telle que pour tout réel $x > 1$ on a :

$$\ln(x) \leqslant u(x) \leqslant \ln(x) + 2$$

1. Déterminer la limite de la fonction u en $+\infty$.
2. On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$

   a. Déterminer la limite de la fonction f en ∞ à l'aide de la propriété de limite par composition.

   b. Citer les propriétés des fonctions inverse et racine carrée qui permettent d'affirmer que pour tout réel $x > 1$, on a :

   $$\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}} \geqslant f(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{\ln(x)+2}}$$

   c. Retrouver la limite de la fonction f en $+\infty$ par une autre méthode.