Exercice 1 *Métropole mai 2022*

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

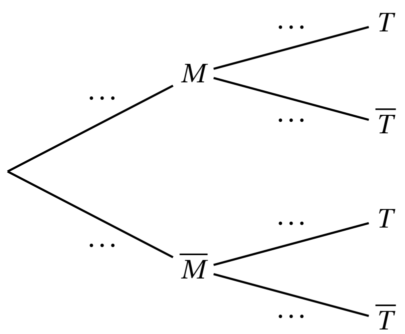
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.
3. Démontrer que la probabilité de T est égale à $0,694$.
4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.

   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.
5. **a.** Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.

   b. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de $0,694$.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

   On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.

b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.

c. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à $0,99$?

Exercice 2 *Asie mai 2022*

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.
Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.
Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?

3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.

4. Calculer $P(X \leqslant 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.

Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.

On appelle :

Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;

C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

a. Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.

b. Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.

c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.
Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.

d. Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

Corrigés réalisés par des collègues de l'APMEP.

Corrigé 1 *Métropole mai 2022*

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

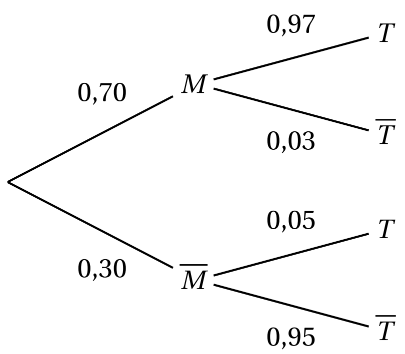
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.

On calcule $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,7 \times 0,97 = 0,679$

3. Démontrer que la probabilité de T est égale à 0, 694.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right)$; or

$P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$, d'où :
$P(T) = 0,679 + 0,015 = 0,694$.

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.

Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.

On calcule donc $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,679}{0,694} \approx 0{,}978\,4$ soit 0,978 au millième près.

5. **a.** Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.

On appelle « valeur prédictive négative du test » la probabilité que le coyote ne soit pas malade sachant que son test est négatif.

Elle est égale à $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right) = \dfrac{P\left(\overline{T} \cap \overline{M}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}$.

Or $P\left(\overline{T} \cap \overline{M}\right) = P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)$;

- $P\left(\overline{T}\right) = 1 - P(T) = 1 - 0,694 = 0,306$;
- $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right) = \dfrac{P\left(\overline{T} \cap \overline{M}\right)}{P\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{0,3 \times 0,95}{0,306} \approx 0,9313$, soit 0,931 au millième près.

b. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

Comme $0,978 > 0,931$ cela signifie qu'un résultat positif (erreur d'à peu près 2 %) est plus probant qu'un résultat négatif (erreur d'à peu près 7 %).

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de $0,694$.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.

Le nombre de coyotes est assez important pour que toutes les captures indépendantes sont celles d'animaux dont la probabilité de positivité au test est de 0,694. La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $P = 0,694$.

b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.

On sait que $P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,694^1 \times (1 - 0,694)^{5-1} \approx 0,030$ soit 0,03 au centième près.

c. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

On vérifie si effectivement $P(X \geqslant 4) > \dfrac{1}{2}$.

Or $P(X \geqslant 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$;

$P(X = 4) = \binom{5}{4} \times 0,694^4 \times 0,306^1 \approx 0,3549$ et

$P(X = 5) = \binom{5}{5} \times 0,694^5 \times 0,306^0 \approx 0,1609$

Donc $P(X \geqslant 4) \approx 0,3549 + 0,3549$, soit $P(X \geqslant 4) \approx 0,5158$ valeur supérieure à 0,5 : le vétérinaire a raison.

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à $0,99$?

Il faut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(Y \geqslant 1) > 0,99$ avec Y variable aléatoire associée au nombre de coyotes ayant un test positif.

Or $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,694^0 \times 0,306^n = 1 - 0,306^n$. Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation : $1 - 0,306^n > 0,99 \iff 0,01 > 0,306^n$

Par croissance de la fonction logarithme népérien : $\ln 0,01 > n \ln 0,306 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,306} < n$ car $\ln 0,306 < 0$.

Comme $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,306} \approx 3,9$: il faut donc capturer au moins 4 coyotes.

Corrigé 2 *Sujet Asie mai 2022*

1. La présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres et chaque passager a la même probabilité 0,95 d'être présent, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 206$ et $p = 0,95$.

2. On a $\text{E} = n \times p = 206 \times 0,95 = 196,3 \approx 196$. En moyenne sur 206 titulaires d'un billet à peu près 196 vont se présenter.

3. On a $P(X = 201) = \binom{206}{201} \times 0,95^{201} \times 0,05^5 \approx 0,03063$, soit 0,031 au millième près.

4. La calculatrice donne $P(X \leqslant 200) \approx 0,9477$, soit 0,948 au millième près.

   Il est donc à peu près certain que l'avion sera au mieux juste rempli.

5. On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	0,000 03
c_i	51 500	50 650	49 800	48 950	48 100	47 250	46 400

   a. En complétant à 1 la somme des probabilités données dans le tableau on trouve : $P(Y = 6) = 1 - \big(P(Y = 0) + P(Y = 1) + \cdots + P(Y = 5)\big) = 0,00003$.

   b. La compagnie a encaissé $206 \times 250 = 51\,500$ € et elle devra rembourser 850 € à chaque client ne pouvant embarquer, donc $C = 51\,500 - 850Y$

   c. Voir le tableau ci-dessus.

   On a $\text{E}(C) = 51\,500 \times 0,94775 + \ldots 46\,400 \times 0,00003 \approx 51\,429,2$, soit 51 429 € à l'euro près

   d. En vendant exactement 200 billets, la compagnie fera un chiffre d'affaires de 200×250 soit 50 000 euros.

   En pratiquant le surbooking, la compagnie peut espérer un chiffre d'affaires de 51 429 euros.