Lois discrètes

Capacité 1

Soit n un entier strictement positif. Une roue de loterie parfaitement équilibrée est partagée en n secteurs circulaires de même angle au centre, numérotés de 1 à n.
La roue est lancée puis s'arrête sur un secteur. Soit Y la variable aléatoire donnant le numéro du secteur sur lequel la roue s'est arrêtée.

1. Donner la loi suivie par la variable aléatoire Y.

Y suit une loi uniforme sur l'ensemble des entiers compris entre 1 et n : $\{1;2;3;\dots;n\}$

2. Un écran affiche à côté de la roue, que sur les 10000 lancers déjà effectués avec la roue, la valeur moyenne de Y est environ 53 à 0,1 près.

   Quelle valeur peut-on conjecturer pour n ? Justifier.

La valeur moyenne de Y sur 10000 lancers est très probablement proche de $E(Y) = \frac{n+1}{2}$
On peut donc conjecturer que n est solution de l'équation : $53 = \frac{n+1}{2} \iff 106 = n+1 \iff 105 = n$

Capacité 2 ***Identifier une épreuve de Bernoulli et déterminer son paramètre, voir exo résolu 2 p. 197***

Un joueur participe au jeu suivant à l'entrée d'une séance de cinéma :

- On lance deux dés cubiques équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6, et on note les numéros apparaissant sur la face supérieure de chaque dé.
- Le joueur reçoit 1 sucette si le produit des numéros apparaissant sur les faces supérieures des deux dés lancés est strictement inférieur à 10, sinon il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire représentant le ~~gain algébrique~~ nombre de sucettes du joueur.

1. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ? X suit-elle une loi de Bernoulli ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Sur un échantillon de ~~1000~~ 3 600 entrées combien de sucettes seront-elles distribuées en moyenne gratuitement par le cinéma ?

1) Le joueur reçoit 0 ou 1 sucette donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre p égal à la probabilité que le produit des faces de 2 dés à 6 faces équilibrés soit inférieur à 10

2)

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

L'expérience aléatoire du lancer de 2 dés comporte $6 \times 6 = 36$ issues élémentaires que sont les couples (face dé 1, face dé 2)

D'après le tableau de dénombrement ci-dessus on a 17 issues élémentaires qui réalisent un produit inférieur à 10

donc la probabilité de cet événement est :

$$\frac{17}{36}$$

Ainsi $P(X=1) = \frac{17}{36} = p$ est le paramètre de cette loi de Bernoulli

La loi de probabilité de X est :

k	0	1
$P(X=k)$	$1-\frac{17}{36}=\frac{19}{36}$	$\frac{17}{36}$

3) D'après une propriété du cours, l'espérance de la v.a. X, suivant une loi de Bernoulli de paramètre p

est $E(X) = p = \frac{17}{36}$

D'après la loi faible des grands nombres le nombre moyen de sucettes distribuées sur un échantillon assez grand de 3600 personnes sera probablement proche de p.

Soit n le nombre de sucettes distribuées en moyenne pour 3600 entrées

$$\frac{n}{3600} \simeq p \text{ soi } n \simeq 3600 \times p$$

$$n \simeq 3600 \times \frac{17}{36}$$

$$n \simeq 1700$$

Algorithmique 1 *Simuler une variable aléatoire de Bernoulli*

On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle « succès » l'apparition de la face 6.
Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la face est 6 et la valeur 0

1. X suit-elle une loi de Bernoulli ? Si oui, déterminer son paramètre.
2. On rappelle que `randint(a, b)` est un entier choisi aléatoirement entre deux entiers `a` et `b` compris. Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X :

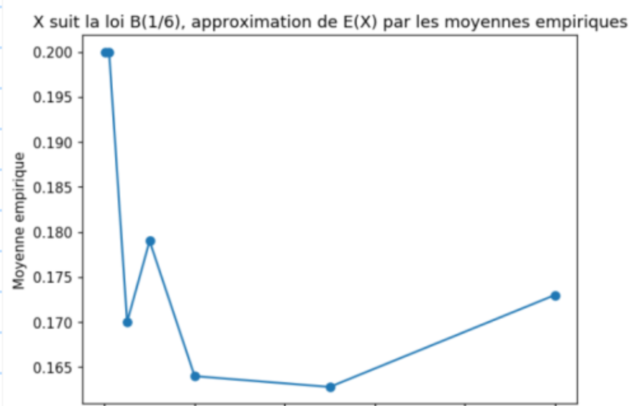
```python
from random import randint

def simulX():
    if ...................:
        return ......
    else:
        return ......
```

3. De quelle valeur devraient se rapprocher `mystere(1000)`, `mystere(10000)` et `mystere(100000)` ? Justifier.

```python
from random import randint

def mystere(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + simulX()
    return s / n
```

```python
# Exemples du cours Loi Binomiale

# Algorithmique 1
from random import randint

def simulX():
    if  randint(1, 6) == 6:
        return 1
    else:
        return 0

def mystere(n):
    """Approximation de l'espérance de X
    par la moyenne empirique (loi faible des grands nombres)
    """
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + simulX()
    return s / n

```

$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ donc les moyennes empiriques sur un échantillon de réalisations indépendantes tendent vers $\frac{1}{6}$.



Capacité 3 *Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli*

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, déterminer si elle peut être modélisée par un schéma de Bernoulli et si oui, préciser ses paramètres.

1. On lance dix fois une pièce équilibrée et on compte le nombre de « Face » obtenues.
2. On lance deux fois un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on compte le nombre de faces paires obtenues.
3. On tire trois fois et avec remise une boule dans une urne contenant 10 noires et 7 boules rouges et on note le nombre de boules rouges obtenues.
4. On tire trois fois et sans remise une boule dans une urne contenant 10 noires et 7 boules rouges et on note le nombre de boules rouges obtenues.
5. Un opérateur de télémarketing appelle 200 clients dans la journée. La probabilité qu'un client accepte l'offre commerciale est de 0,15. Le chef de l'opérateur note le nombre de clients qui ont accepté l'offre.

1) Schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$

2) Schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{2}$

3) Schéma de Bernoulli de paramètres $n = \cancel{10}\,3$ et $p = \frac{7}{17}$

4) Tirages sans remise donc ce n'est pas un schéma de Bernoulli.

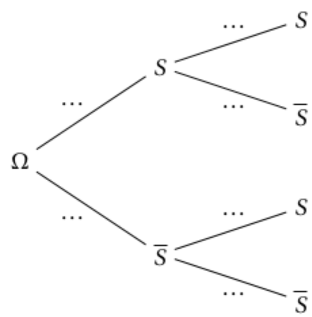
5) Schéma de Bernoulli de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}15$.

Capacité 4 *Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli*

On considère l'épreuve de Bernoulli E de paramètre $p = \dfrac{1}{6}$ qui consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et à compter comme *succès* l'obtention d'un 6.

1. On répète 2 fois l'expérience aléatoire E de façon indépendante.

a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous. On a noté S un succès et $\overline{S}$ un échec.



b. Soit la variable aléatoire X_2 qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{6}$.

i. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_2 ?

ii. Déterminer sa loi de probabilité et son espérance.

2. On répète 3 fois l'expérience aléatoire E de façon indépendante.

a. Représenter ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{6}$ par un arbre pondéré en notant S un succès et $\overline{S}$ un échec.

b. Soit la variable aléatoire X_3 qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{6}$.

i. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_3 ?

ii. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(X_3 = 3)$ et $\mathbb{P}(X_3 = 0)$.

iii. Combien de chemins dans l'arbre réalisent 2 succès ? Exprimer ce nombre à l'aide d'un coefficient binomial et en déduire une formule de calcul de $\mathbb{P}(X_3 = 2)$.

iv. Exprimer de même $\mathbb{P}(X_3 = 1)$.

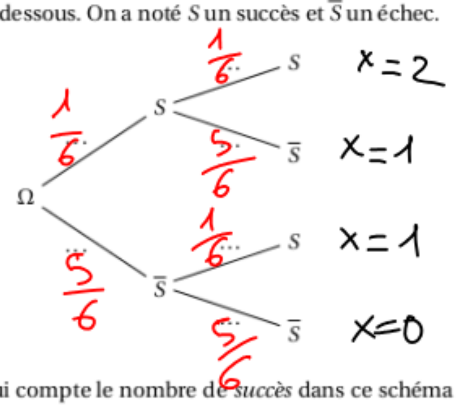
v. Dresser un tableau de la loi de probabilité de X_3 et déterminer son espérance.

3. On répète n fois (avec $n \geqslant 1$) l'expérience aléatoire E de façon indépendante. Soit la variable aléatoire X_n qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = \dfrac{1}{6}$.

On considère l'épreuve de Bernoulli E de paramètre $p = \frac{1}{6}$ qui consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et à compter comme *succès* l'obtention d'un 6.

1. On répète 2 fois l'expérience aléatoire E de façon indépendante.

a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous. On a noté S un succès et $\overline{S}$ un échec.



b. Soit la variable aléatoire X_2 qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{6}$.

c. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_2 ?

d. Déterminer sa loi de probabilité et son espérance.

1) c) X_2 prend les valeurs 0, 1 ou 2.

d) loi de probabilité de X_2 :

k	0	1	2
$P(X_2=k)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$2\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$

Espérance de X : $E(X) = 0\times\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1\times 2\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} + 2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2$

$$E(X) = 2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times(5+1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Sur un échantillon de grande taille de réalisations indépendantes de X, la moyenne empirique de X doit être proche de $E(X) = \frac{1}{3}$. C'est la loi faible des grands nombres.

2. On répète 3 fois l'expérience aléatoire E de façon indépendante.

a. Représenter ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{6}$ par un arbre pondéré en notant S un succès et $\overline{S}$ un échec.

b. Soit la variable aléatoire X_3 qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{6}$.

c. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_3 ?

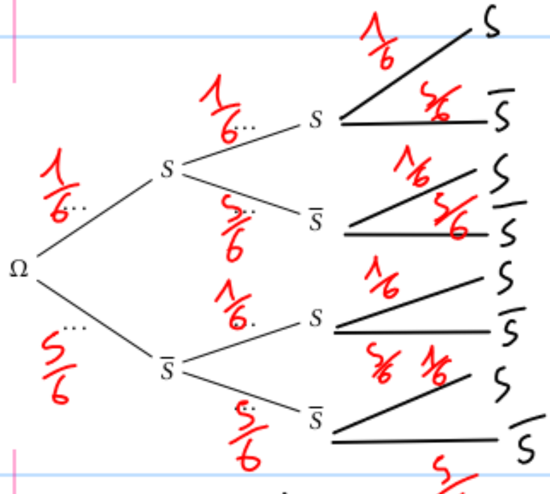
d. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(X_3 = 3)$ et $\mathbb{P}(X_3 = 0)$.

e. Combien de chemins dans l'arbre réalise 2 succès ? Exprimer ce nombre à l'aide d'un coefficient binomial et en déduire une formule de calcul de $\mathbb{P}(X_3 = 2)$.

f. Exprimer de même $\mathbb{P}(X_3 = 1)$.

g. Dresser un tableau de la loi de probabilité de X_3 et déterminer son espérance.

a)



b) On a une répétition de $n=3$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p = \frac{1}{6}$.
C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n=3$ et $p = \frac{1}{6}$.

X_3, qui compte le nombre de succès dans ce schéma, suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p = \frac{1}{6}$.

c) X_3 prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

d) $P(X_3=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

$P(X_3=1) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

e) Le nombre chemins réalisant 2 succès parmi 3 épreuves est le nombre de combinaisons de 2 éléments pris parmi 3, c'est-à-dire.

$\binom{3}{2} = 3$

Chaque chemin réalisant 2 succès a une probabilité de $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$ donc :

$$P(X_3=2) = \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{nombre de chemins}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}}_{\text{probabilité d'un chemin}}$$

donc $P(X_3=2) = 3 \times \frac{1}{6^2} \times \frac{5}{6} = 3 \times \frac{5}{6^3} = \frac{5}{72}$

f) De même on a :

$$P(X_3=1) = \binom{3}{1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \times \frac{5^2}{6^3} = \frac{5^2}{72} = \frac{25}{72}$$

g)

k	0	1	2	3
$P(X_3=k)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$	$3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$

On vérifie que :
$P(X_3=0) + P(X_3=1) + P(X_3=2) + P(X_3=3) = 1$

On vérifie que $E(X_3) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

me X_n.

```
from random import randint

def simulX(n):
    nbsucces = 0
    for k in range(n):
        if randint(1, 6) == 6 :
            nbsucces = nbsucces + 1
    return nbsucces
```

```
## Question 4

from random import random
from math import floor

def bernoulli truque(p):
    return floor(p + random())

def simulY(n, p):
    nbsucces = 0
    for k in range(n):
        nbsucces = nbsucces + bernoulli_truque(p)
    return nbsucces
```

On a $\quad 0 \leq \text{random}() < 1$

$\iff p \leq p + \text{random}() < 1 + p$

$\text{floor}(p + \text{random}()) == 0$ ssi $p \leq p + \text{random}() < 1$

ssi $0 \leq \text{random} < 1 - p$

Or random suit une loi uniforme sur $[0;1[$

donc $P(0 \leq \text{random}() < 1-p) = 1 - p$

et donc $P(\text{floor}(\text{random}() + p) == 0) = 1 - p$

et $P(\text{floor}(\text{random}() + p) == 1) = 1 - (1-p) = p$

Capacité 5 ***Calculer un coefficient binomial, voir exo résolu 7 p.199***

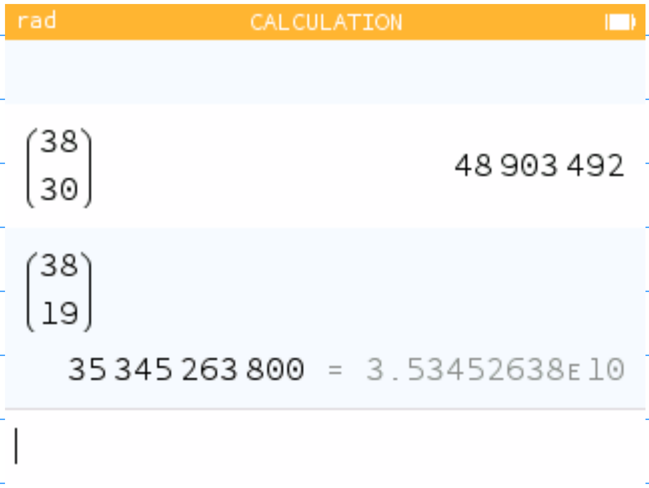
Un championnat est constitué de 38 matchs. Lors d'un match, deux issues sont possibles : la victoire ou la défaite. On peut modéliser cette situation par un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 38$ et $p = \frac{1}{2}$. On considère l'arbre représentant ce schéma.

1. Interpréter et calculer les coefficients binomiaux $\binom{38}{38}$, $\binom{38}{0}$, $\binom{38}{1}$ et $\binom{38}{37}$.
2. Avec la calculatrice, déterminer le nombre de chemins réalisant 30 succès.
3. Déterminer le nombre de façons de perdre 8 matchs sur 38.
4. Déterminer le nombre de façons de gagner la moitié des matchs disputés.

1) $\binom{38}{38} = 1$ $\binom{38}{0} = 1$ $\binom{38}{1} = 38$

$\binom{38}{37} = 38$

2) $\binom{38}{30} = 48\,903\,492$



3) $\binom{38}{8} = \binom{38}{30}$

4) $\binom{38}{19} = 35\,345\,263\,800$

Capacité 6 ***Reconnaître un schéma de Bernoulli et une loi binomiale***

Déterminer dans chaque cas si on peut modéliser la situation par un schéma de Bernoulli et une loi binomiale et si oui déterminer leurs paramètres.

1. **Situation 1** On s'intéresse à la variable aléatoire V qui compte le nombre d'ampoules avec défaut dans un échantillon de 10 ampoules choisies au hasard parmi la production d'une journée à la sortie d'une machine dont la probabilité de fabrication d'une ampoule sans défaut est égale à $0,9305$. La taille du stock permet d'assimiler ce prélèvement à des tirages avec remise.
2. **Situation 2** On s'intéresse à la variable aléatoire X qui compte le nombre de boules rouges obtenues lorsqu'on tire simultanément trois boules dans une urne contenant 60 boules rouges et 40 boules blanches.
3. **Situation 3** On s'intéresse à la variable aléatoire Y qui compte le nombre de boules rouges obtenues lorsqu'on tire successivement avec remise trois boules dans une urne contenant 60 boules rouges et 40 boules blanches.
4. **Situation 4** On s'intéresse à la variable aléatoire Z qui compte le nombre de boules rouges obtenues lorsqu'on tire successivement sans remise trois boules dans une urne contenant 60 boules rouges et 40 boules blanches.

1) Situation 1 :

On a une répétition de $n=10$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (tirage avec remise) dont la probabilité de succès est :
$p = 1 - 0,9305 = 0,0695$

V suit donc une loi binomiale de paramètres :
$n = 10$ et $p = 0,0695$

2) Situation 2 : tirage simultané équivalent à tirage sans remise donc on ne peut pas se ramener à une répétition d'expériences identiques et indépendantes.
Ce n'est pas un schéma de Bernoulli et X ne suit pas une loi binomiale.

3) Situation 3 :

On a une répétition $n = 3$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (tirage avec remise) dont la probabilité de succès est :

$p = \frac{60}{100} = 0,6$

4) Situation 4 : les tirages étant sans remise les épreuves successives ne sont ni indépendantes ni identiques. On n'a pas de schéma de Bernoulli et Z ne suit pas une loi binomiale.

Capacité 7 ***Calculer des probabilités pour une loi binomiale***

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.
Calculer des valeurs approchées des probabilités ci-dessous, avec les fonctions préprogrammées de la calculatrice.

1. $\mathbb{P}(X = 3)$
2. $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$
3. $\mathbb{P}(X \leqslant 4)$
4. $\mathbb{P}(X \geqslant 4)$
5. $\mathbb{P}(4 \leqslant X \leqslant 8)$
6. $\mathbb{P}((X \leqslant 4) \cup (8 \leqslant X))$

```
>>> binompdf(10, 0.3, 3)
0.2668279319999998
>>> binomcdf(10, 0.3, 3)
0.6496107183999996
```

```
>>> binomcdf(10, 0.3, 4)
0.8497316673999995
>>> 1 - binomcdf(10, 0.3, 3)
0.3503892816000004
>>> binomcdf(10, 0.3, 8) - binomcdf(10, 0.3, 3)
0.3502455956999997
```

```
>>> binomcdf(10, 0.3, 4) + 1 - binomcdf(10, 0.3, 7)
0.8513220538000001
>>>
```

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que la probabilité qu'un casque de cette marque choisi au hasard présente un défaut est de $0,036$.
On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.

a. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,\ p)$ où $n = 35$ et $p = 0,036$.

On a une répétition de $n=35$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont la probabilité de succès est $p=0,036$. La variable aléatoire X comptant le nombre de succès dans ce schéma suit donc une loi binomiale de paramètres $n=35$ et $p=0,036$.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception. Donner une valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près.

$P(X=1) = n \times p^1 \times (1-p)^{n-1} = 35 \times 0,036 \times 0,964^{34}$
$P(X=1) \simeq 0,362$ à 10^{-3} près

c. Calculer la probabilité qu'au moins un des 35 casques présente un défaut. Donner une valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-p)^{35}$
$P(X \geqslant 1) = 1 - 0,964^{35} \simeq 0,723$ à 10^{-3} près

2. Dans cette question, n n'est pas fixé.

Déterminer le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieure à 0,99.

X suit désormais une loi binomiale $B(n\,;0{,}036)$

$P(X \geqslant 1) = 1 - (1-p)^n = 1 - 0{,}964^n$

$P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99 \iff 1 - 0{,}964^n \geqslant 0{,}99$

$\iff 0{,}01 \geqslant 0{,}964^n$

$\iff \ln(0{,}01) \geqslant n \ln(0{,}964)$

$\iff \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}964)} \leqslant n$ car $\ln(0{,}964) < 0$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}964)} \simeq 125{,}6$; donc il faut commander au moins 126 casques pour que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$

Capacité 9 ***Utiliser l'espérance d'une loi binomiale***

Sur une ligne aérienne, une compagnie affrète un appareil de 200 places et vend 202 réservations par vol. On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 202$ et $p = 0,971$.

1. Déterminer le nombre moyen de passagers par vol.
2. Calculer la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement.
3. Calculer la probabilité qu'un seul client parmi les 202 qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement.
4. En déduire la probabilité que la compagnie se trouve en situation de surréservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).

1) $E(X) = n \times p = 202 \times 0,971 = 196,142$

2) $P(X = 202) = p^{202} = 0,971^{202} \approx 0,0262$ à 10^{-4} près

3) $P(X = 201) = \binom{202}{1} p^{201} \times (1-p)$

$P(X = 201) = 202 \times 0,971^{201} \times 0,029 \approx 0,0158$ à 10^{-4} près

4) La probabilité de surréservation est $P(X=202) + P(X=201) \approx 0,0420$ à 10^{-4} près

Algorithmique 3
On note Y la variable aléatoire qui renvoie le rang du premier 6 lorsqu'on lance un dé équilibré à 6 faces jusqu'à l'obtention d'un 6.

1. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(Y=1)$, $\mathbb{P}(Y=2)$ et $\mathbb{P}(Y=3)$.
2. Soit n un entier naturel non nul, exprimer $\mathbb{P}(Y=n)$.
3. Quelles sont les valeurs possibles pour Y ?
4. Compléter la fonction Python `premier6()` pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire Y.


```
from random import randint

def de():
    return randint(1, 6)

def premier6():
    n = 1
    while ..de() != 6..:
        n = ..n+1.......
    return n
```

1) $P(Y=1) = \frac{1}{6}$

$P(Y=2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

$P(Y=3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$

2) Pour tout entier $n \geq 1$:

$P(Y=n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$

3) Y peut prendre toute valeur entière non nulle.

Capacité 10 ***Utiliser une loi géométrique, voir exo 16 p. 203***

1. Quel est le nombre moyen de lancers pour obtenir un premier 6, lors d'une répétition d'expériences indépendantes de lancers d'un dé équilibré à 6 faces?

2. Dans chaque cas, Y désigne une variable aléatoire, suivant une loi géométrique de paramètre p.

   a. Déterminer p si $\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2}$.

   b. Déterminer p si $\mathbb{P}(Y > 2) = 0,49$.

1) Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier 6 lors d'une série de lancers successifs d'un dé équilibré à 6 faces.

X suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$ donc $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

2) Y suit une loi géométrique de paramètre $p > 0$.

a) $E(Y) = \frac{3}{2} \iff \frac{1}{p} = \frac{3}{2} \iff p = \frac{2}{3}$

b) $P(Y > 2) = 0,49 \iff P(Y \leq 2) = 0,51$

$P(Y>2) = 0,49 \iff P(Y=1) + P(Y=2) = 0,51$

$\iff p + (1-p)p = 0,51$

$\iff p(2-p) = 0,51$

$P(Y>2) = 0,49 \iff p^2 - 2p + 0,51 = 0 \quad (E)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 0{,}51 = 1{,}96$$

$$\Delta = 1{,}4^2$$

$\Delta > 0$ donc l'équation (E) a 2 solutions distinctes :

$$p_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-1{,}4}{2} = 0{,}3$$

$$p_2 = \frac{2+1{,}4}{2} = 1{,}7$$

Mais p est une probabilité strictement positive donc $0 < p \leq 1$

et donc $p_1 = 0{,}3$ est l'unique solution

Capacité 11 *Utiliser une loi géométrique, voir aussi exercice 92 p.212*

Soit Z la variable aléatoire simulée par la fonction Python ci-dessous.

```
from random import randint
# randint(1, 6) est un entier aléatoire entre 1 et 6

def dé():
    """Simule le lancer d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6
        """
    return randint(1, 6)

def Z():
    """Simule une variable aléatoire Z"""
    rang_lancer = 1
    while dé() < 6:
        rang_lancer = rang_lancer + 1
    return rang_lancer
```

1. Donner la loi suivie par la variable aléatoire Z, préciser sa ou ses caractéristique(s).
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité $\mathbb{P}(Z = 3)$.
3. Calculer la valeur exacte de la probabilité $\mathbb{P}(Z > 7)$.
4. Le joueur n'a pas obtenu de 6 sur ses trois premiers lancers. Calculer la valeur exacte de la probabilité que le premier 6 n'arrive pas avant le septième lancer.

Soit Z la variable aléatoire simulée par la fonction Python ci-dessous.

```python
from random import randint
# randint(1, 6) est un entier aléatoire entre 1 et 6

def dé():
    """Simule le lancer d’un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6"""
    return randint(1, 6)

def Z():
    """Simule une variable aléatoire Z"""
    rang_lancer = 1
    while dé() < 6:
        rang_lancer = rang_lancer + 1
    return rang_lancer
```

1. Donner la loi suivie par la variable aléatoire Z, préciser sa ou ses caractéristique(s).

Z suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$

2. Calculer la valeur exacte de la probabilité $\mathbb{P}(Z = 3)$.

$P(Z=3) = (1-p)^2 \times p = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$

3. Calculer la valeur exacte de la probabilité $\mathbb{P}(Z > 7)$.

$P(Z>7) = (1-p)^7 = \left(\frac{5}{6}\right)^7$

4. Le joueur n’a pas obtenu de 6 sur ses trois premiers lancers. Calculer la valeur exacte de la probabilité que le premier 6 n’arrive pas avant le septième lancer.

$P_{(Z>3)}(Z>6)$ est égale par propriété de loi sans mémoire à :

$P_{(Z>3)}(Z>6) = P(Z>6-3) = P(Z>3) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$

84 L'OCDE estime qu'en France environ 49 % de la population de 65 ans et plus est vaccinée contre la grippe.

On tire au hasard 200 personnes dans le listing des titulaires d'une carte de réduction réservée aux personnes de 65 ans et plus.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes vaccinées contre la grippe parmi ces 200 personnes.

a) Déterminer la loi de probabilité suivie par X.

b) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soient vaccinées contre la grippe. *Arrondir au centième.*

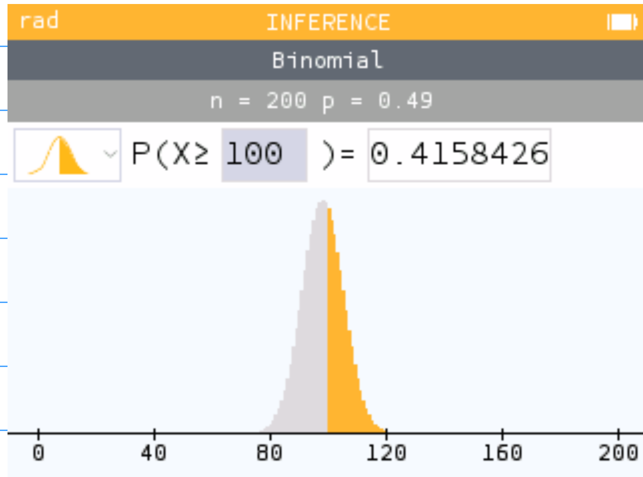
c) Déterminer la probabilité que 90 personnes au plus soient vaccinées contre la grippe. *Arrondir au centième.*

d) À l'aide de la calculatrice, déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,95$.

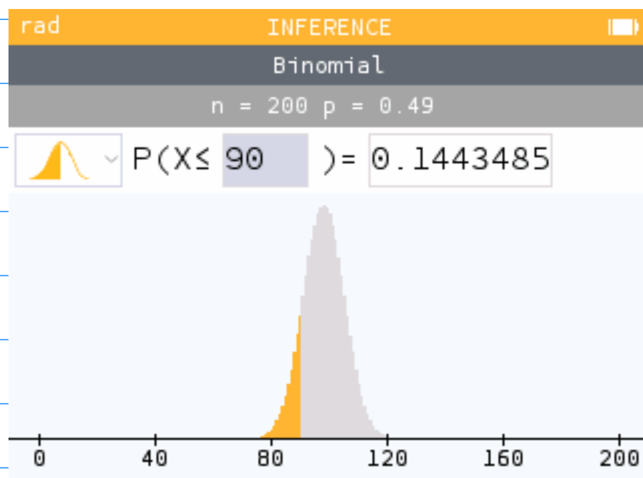
Interpréter cette valeur.

a) On a une répétition de $n = 200$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, dont la probabilité de succès est $p = 0,49$.
La variable aléatoire X donnant le nombre de personnes vaccinées suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,49$.

b) $P(X \geqslant 100) \simeq 0,416$ à 10^{-3} près



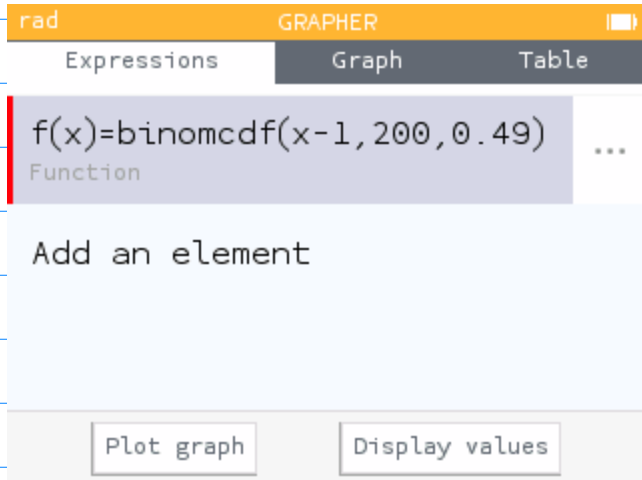
c) $P(X \leq 90) \simeq 0{,}144$ à 10^{-3} près



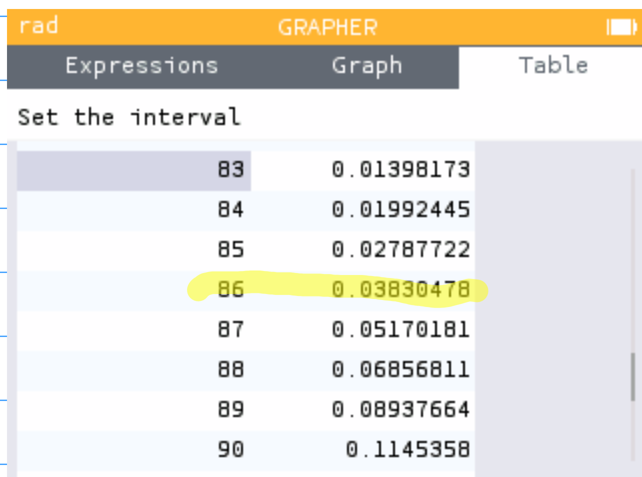
d) $P(X \geq k) \geq 0{,}95 \iff 1 - P(X \leq k-1) \geq 0{,}95$

$\iff 0{,}05 \geq P(X \leq k-1)$

On fait un tableau de valeurs de $P(X \leq k-1)$ avec la calculatrice



Par balayage, on détermine le plus grand entier tel que $P(X \leq k-1) \leq 0{,}05$ et on trouve que c'est 86



83	0.01398173
84	0.01992445
85	0.02787722
86	0.03830478
87	0.05170181
88	0.06856811
89	0.08937664
90	0.1145358

86 est donc le plus grand entier tel que $P(X \geq k) \geq 0{,}95$, c'est-à-dire qu'on a une probabilité supérieure ou égale à 0,95 d'avoir au moins 86 personnes vaccinées dans l'échantillon de taille 200, mais que la probabilité d'avoir au moins 87 personnes vaccinées est inférieure à 0,95.

capacité 11

92 **Algo** La durée de vie, en année, d'un élément radioactif peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit la loi géométrique de paramètre $p = 0{,}000\,5$.

Le succès est alors l'événement : « L'élément n'émet plus de rayonnement ».

T compte le nombre d'années nécessaires pour arriver au succès. *Arrondir les résultats au millième.*

a) Calculer :

- $P(T > 3\,000)$
- $P(T \leqslant 5\,000)$
- $P(1500 < T \leqslant 2\,500)$

Interpréter les résultats obtenus.

b) Calculer la probabilité que cet élément ne soit pas désintégré au bout de 2 000 ans sachant qu'il n'a pas été désintégré au bout de 1 000 ans.

c) La demi-vie d'un élément radioactif est le temps au bout duquel cet élément a une chance sur deux de ne plus émettre de rayonnement.

À l'aide d'un algorithme, déterminer la durée de demi-vie de cet élément.

a)

- $P(T>3000) = (1-p)^{3000} = (1-0{,}0005)^{3000}$

$\boxed{P(T>3000) = 0{,}9995^{3000} \simeq 0{,}223}$

- $P(T\leq 5000) = 1 - P(T>5000)$

$P(T\leq 5000) = 1 - (1-p)^{5000}$

$\boxed{P(T\leq 5000) = 1 - 0{,}9995^{5000} \simeq 0{,}918}$

- $P(1500 < T \leq 2500) = P(T\leq 2500) - P(T\leq 1500)$

$P(1500 < T \leq 2500) = 1 - P(T>2500) - (1-P(T>1500))$

$P(1500 < T \leq 2500) = P(T>1500) - P(T>2500)$

$P(1500 < T \leq 2500) = (1-p)^{1500} - (1-p)^{2500}$

$\boxed{P(1500 < T < 2500) = 0{,}9995^{1500} - 0{,}9995^{2500} \simeq 0{,}186}$

b) On doit calculer :

$$P_{(T>1000)}(T>2000)$$

D'après la propriété de loi sans mémoire :

$P_{(T>1000)}(T>2000) = P(T>2000-1000) = P(T>1000)$

Or $P(T>1000) = (1-p)^{1000} = 0{,}9995^{1000}$

$$P(T>1000) \simeq 0{,}6065$$

c) On doit calculer la plus petite année k, telle que :

$$P(T \leq k) \geq 0{,}5 \iff P(T>k) \leq 0{,}5$$

$$\iff (1-p)^k \leq 0{,}5$$

Algorithme de seuil en Python

```
def demi_vie(p) :
    k = 0
    while (1-p)**k > 0.5 :
        k = k+1
    return k
```

```
In [4]:
def demi_vie(p):
    k = 0
    while (1-p) ** k > 0.5:
        k = k + 1
    return k
```

```
In [5]:
demi_vie(0.0005)
```

```
Out[5]: 1386
```