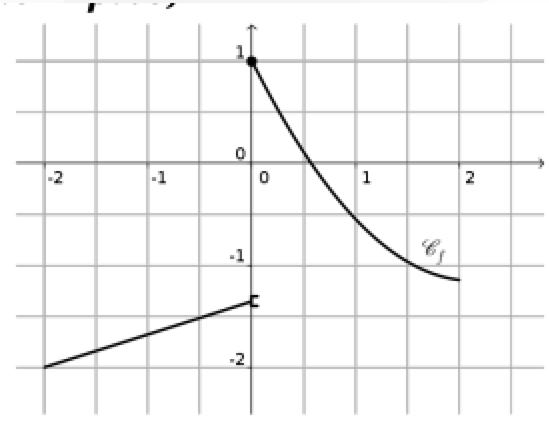
Continuité, corrigés des exemples du cours

Pdf du Cours, *mot de passe :* `parcTerminale`

Capacité 1



La fonction représentée ci-dessous est définie mais discontinue en 0 car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) \neq f(0) = 1$.

Capacité 1

Une fonction définie sur $[-2;2]$ telle que $f(-2) > 0$ et $f(2) < 0$ et f ne s'annule pas sur $[-2;2]$, ne peut être continue sur $[-2;2]$.

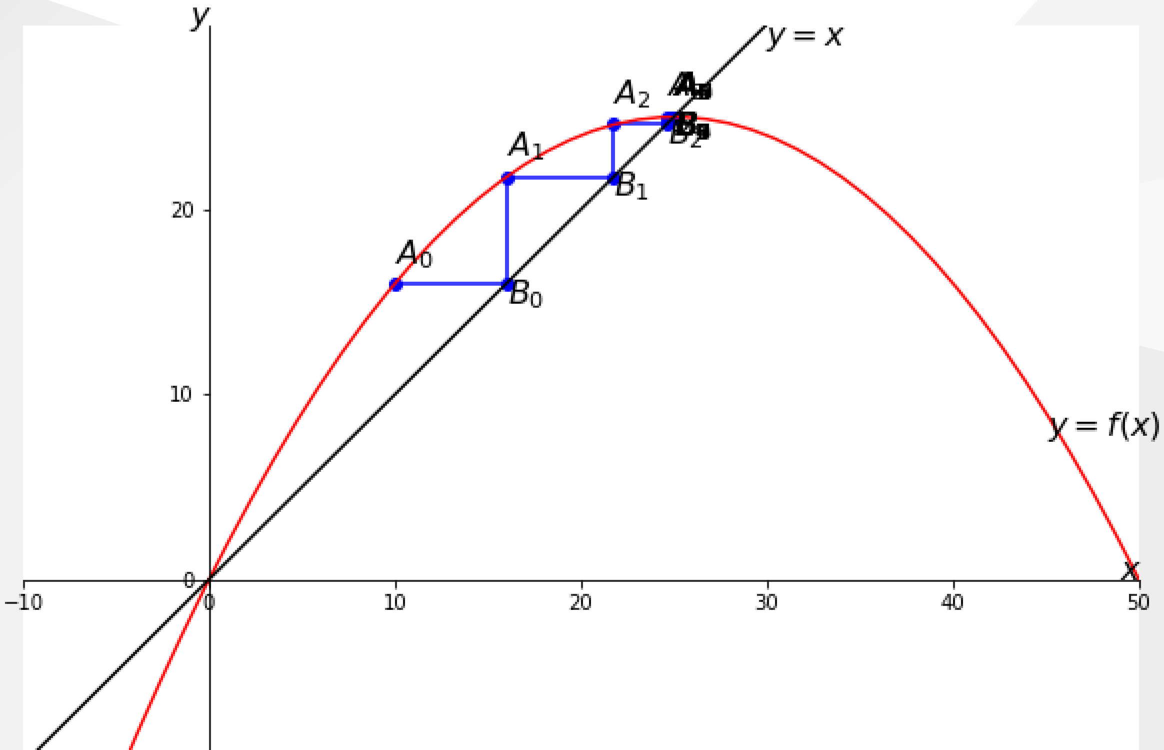
Capacité 2

Dans un pays X, on note u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant une voiture sans conducteur en l'année $2035 + n$.

On a $u_0 = 10$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0,04u_n(50 - u_n)$.

Capacité 2

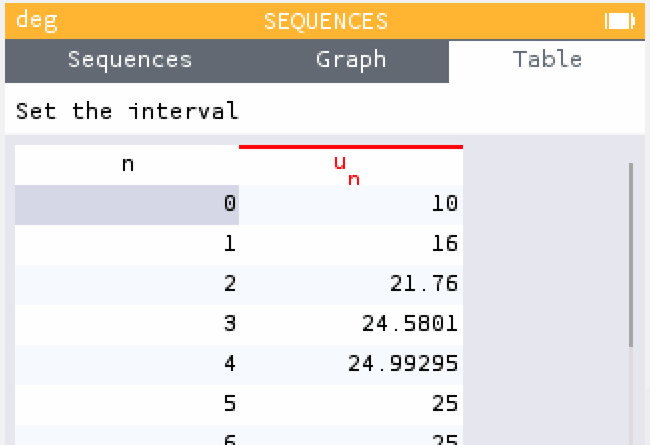
Représentation des quatre premiers termes ci-dessous.



Capacité 2

```
def autonome(n):
        u = 10
    for k in range(n):
        u = 0.04 * u * (50 - u)
    return u
```

On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 25.



n	u_n
0	10
1	16
2	21.76
3	24.5801
4	24.99295
5	25
6	25

Capacité 3

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

- Démontrons que f s'annule sur $\mathbb{R}$:
  - D'une part, f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.
  - D'autre part, $f(-1) = -1$ et $f(6) = 186$, donc on a $f(-1) < 0 < f(6)$.
  - Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $[-1; 6]$.

Capacité 3

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

- Démontrons que $f(x) = 2$ posède au moins une solution sur $[0; 1]$:
  - D'une part, f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.
  - D'autre part, $f(0) = 6$ et $f(1) = 1$, donc on a $f(0) > 2 > f(1)$.
  - Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une solution dans $[0; 1]$.

Capacité 4

On considère la fonction f définie et continue sur $]-\infty\,;9]$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	2	5	9
$f(x)$	-10	5	$2,5$	$+\infty$

Capacité 4

- f est dérivable donc continue sur $]-\infty;2]$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -10$ et $f(2) = 5$, donc on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < -9 < f(2)$
- f est strictement croissante sur $]-\infty;2]$
- Donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -9$ possède une unique solution dans l'intervalle $]-\infty;2]$
- De plus le minimum de f sur $[2;9]$ est $2,5$ donc $f(x) = -9$ n'a pas d'autre solution sur $[2;9]$

Capacité 4

- f est dérivable donc continue sur $]-\infty;2]$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -10$ et $f(2) = 5$, donc on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) < 3 < f(2)$
- f est strictement croissante sur $]-\infty;2]$
- D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ possède une unique solution dans l'intervalle $]-\infty;2]$
- *mutatis mutandis* on démontre que l'équation $f(x) = 3$ possède une unique solution sur $[2;5]$ et une unique solution sur $[5;9]$.

Capacité 4

- Le minimum de f sur $]-\infty;9]$ est -10 donc l'équation $f(x)=-12$ n'a pas de solution sur $]-\infty;9]$.

Capacité 4

- Le minimum de f sur $]-\infty;5]$ est 5 donc l'équation $f(x)=6$ n'a pas de solution sur $]-\infty;5]$.
- f est dérivable donc continue sur $[5;9]$.
- $f(5)=2,5$ et $\lim\limits_{x\to 9} f(x)=+\infty$, donc on a $f(5)<6<\lim\limits_{x\to 9} f(x)=+\infty$
- f est strictement croissante sur $[5;9]$
- D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=6$ possède une unique solution dans l'intervalle $[5;9]$

Capacité 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

- D'après la règle du signe d'un trinôme :
  - $f' > 0$ et f strictement croissante sur $]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$
  - $f' < 0$ et f strictement décroissante sur $]0; 4[$

Capacité 5

- f est dérivable donc continue sur $]-\infty;0]$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f(0) = 6$, donc on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < 0 < 6$
- f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$
- Donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $]-\infty;0]$

Capacité 5

- f est dérivable donc continue sur $[0;4]$.
- $f(0)=6$ et $f(4)=-26$, donc on a $f(0)>0>f(4)$
- f est strictement décroissante sur $[0;4]$
- Donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution β dans l'intervalle $[0;4]$.

Capacité 5

- f est dérivable donc continue sur $[4; +\infty[$.
- $f(4) = -26$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$
- Donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution γ dans l'intervalle $[4; +\infty[$

Capacité 5

Considérons l'unique solution γ de $f(x) = x0$ dans $[4; +\infty[$.

On a $f(5) < 0 < f(6)$ donc $f(5) < f(\alpha) < f(6)$.

De plus f est strictement croissante sur $[4; +\infty[$, donc $5 < \alpha < 6$.

Capacité 5

Approximation de $\gamma \in [5;6]$ par balayage sachant que f est strictement croissante sur $[5;6]$.

```
def f(x):
        return x ** 3 - 6 * x ** 2 + 6

def balayage():
        x = 5
        while f(x) < 0>:
                x = x + 0.1
        return (x - 0.1, x)
```

Capacité 5

On peut déduire du tableau de variations de f que :

- f est négative sur $]-\infty;\alpha[$
- f s'annule en α
- f est positive sur $]-\alpha;\beta[$
- f s'annule en β
- f est négative sur $]\beta;\gamma[$
- f s'annule en γ
- f est positive sur $]\gamma;+\infty[$