Logarithme : résolution d'équations

57 Résoudre chaque inéquation.

a) $e^{x+5} \geqslant 1$ **b)** $e^{-2x} < 5$ **c)** $e^{0,5x} + 10 > 10$

a) exp(x+5) >= 1 équivaut à ln(exp(x+5)) >= ln(1) équivaut à x+5 >= 0
équivautà x >= -5

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc [-5;+oo[

b) exp(-2x) < 5 équivaut à ln(exp(-2x)) < ln(5) équivaut à -2x < ln(5)
équivaut à x > -ln(5) / 2
L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc]-ln(5)/1;+oo[

c) exp(0,5x) + 10 > 10 équivaut à exp(0,5x)>0 qui est toujours vrai

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc R

58 Résoudre chaque inéquation dans $]0;+\infty[$.

a) $\ln(x) \leqslant 2$ **b)** $\ln(x) > -5$ **c)** $\ln(x) < \ln(1,7)$

d) $\ln(2x) < 0$ **e)** $\ln(3x) \geqslant \ln(6)$ **f)** $-4\ln(4x) \geqslant 2$

a) Ensemble de résolution : E =]0;+oo[
On résout dans E =]0;+oo[:

ln(x) <= 2 équivaut a exp(ln(x)) <= exp(2) équivaut à x <= exp(2)

L'ensemble des solution est donc] 0; exp(2)]

b) Ensemble de résolution : E =]0;+oo[
On résout dans E =]0;+oo[:

ln(x) > -5 équivaut a exp(ln(x)) > exp(-5) équivaut à x > exp(-5)

L'ensemble des solutions est donc] exp(-5) ; +oo[

c) Ensemble de résolution : E =]0;+oo[
On résout dans E =]0;+oo[:

ln(x) < ln(1,7) équivaut a exp(ln(x)) < exp(ln(1,7)) équivaut à x < 1,7

L'ensemble des solutions est donc] 0; 1,7[

d) Ensemble de résolution : E =]0;+oo[
On résout dans E =]0;+oo[:

ln(2x) <0 équivaut a exp(ln(2x)) < exp(0) équivaut à 2x < 1

L'ensemble des solutions est donc] 0; 1/2[

e) Ensemble de résolution : E =]0;+oo[
On résout dans E =]0;+oo[:

ln(3x) >= ln(6) équivaut a exp(ln(x)) >= exp(ln(6)) équivaut à x >= 6

L'ensemble des solution est donc [6 ; + oo [

f) Ensemble de résolution : E =]0;+oo[
On résout dans E =]0;+oo[:
-4ln(4x) >= 2 équivaut a ln(4x) <= -0,5
-4 équivaut à exp(ln(4x)) <= exp(-0,5)
équivaut à 4x <= exp(-0,5)
équivaut à x <= exp(-0,5)/4
L'ensemble des solution est donc] 0; exp(-0,5)/4]

Pour les exercices 51 à 53, l'équation proposée est de la forme $\ln(u(x)) = m$.
Déterminer l'ensemble E des nombres réels x tels que $u(x) > 0$, puis résoudre dans E l'équation.

51 **a)** $\ln(x-4)=1$ **b)** $\ln(3x+9)=-2$

52 **a)** $\ln(1-x)=5$ **b)** $\ln(2-6x)=0$

53 **a)** $\ln\left(x^2\right)=1$ **b)** $\ln\left(-x^2+3x+4\right)=0$

51

a) (1) Ensemble de résolution

$\ln(x-4)$ définie ssi $x-4>0$

ssi $x>4$

$E =]4 ; +\infty[$

(2) On résout dans E

$$\begin{cases} \ln(x-4) = 1 \\ x \in E \end{cases} \iff \begin{cases} e^{\ln(x-4)} = e^1 \\ x \in E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=e^1 \\ x\in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+e^1 \\ x\in E \end{cases}$$

$4+e^1 \in E$ donc $\mathcal{S}=\{4+e^1\}$

b) (1) Ensemble de résolution E

$\ln(3x+9)$ définie ssi $3x+9>0$

ssi $x>-\frac{9}{3}=-3$

On a donc $E=]-3\,;+\infty[$

(2) On résout dans E

$$\begin{cases} \ln(3x+9)=-2 \\ x\in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\ln(3x+9)}=e^{-2} \\ x\in E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+9=e^{-2} \\ x\in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{e^{-2}-9}{3}=-3+\frac{e^{-2}}{3} \\ x\in E \end{cases}$$

$-3+\frac{e^{-2}}{3}\in E$ donc $\mathcal{S}=\left\{-3+\frac{e^{-2}}{3}\right\}$

52

a) (1) Ensemble de résolution E :

$\ln(1-x)$ définie ssi $1-x>0$

ssi $1>x$

On a donc $E =]-\infty ; 1[$

(2) On résout dans E :

$$\begin{cases} \ln(1-x)=5 \\ x\in E \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x=e^5 \\ x\in E \end{cases} \iff \begin{cases} x=1-e^5 \\ x\in E \end{cases}$$

On a bien $1-e^5 \in E$ donc $S=\{1-e^5\}$

b) (1) Ensemble de résolution

$\ln(2-6x)$ définie ssi $2-6x>0$

ssi $\frac{2}{6}>x$

On a donc $E =]-\infty ; \frac{1}{3}[$.

(2) On résout dans E

$$\begin{cases} \ln(2-6x)=0 \\ x\in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\ln(2-6x)}=e^0 \\ x\in E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-6x=1 \\ x\in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6}=x \\ x\in E \end{cases}$$

$\frac{1}{6}\in E$ donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

53

a) Ensemble de résolution :

$\ln(x^2)$ définie ssi $x^2>0$
ssi $x\neq 0$

On a donc $E=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

b) On résout dans E :

$$\begin{cases} \ln(x^2)=1 \\ x\in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\ln(x^2)}=e^1 \\ x\in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=e \\ x\in E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{e} \\ x\in E \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-\sqrt{e} \\ x\in E \end{cases}$$

$-\sqrt{e}$ et $\sqrt{e}$ sont dans E donc $\mathcal{S}=\{-\sqrt{e};\sqrt{e}\}$

b)

(1) Ensemble de résolution

$\ln(-x^2+3x+4)>0$ ssi $-x^2+3x+4>0$

$\Delta = 3^2 - 4\times(-1)\times 4 = 9+16 = 25$

$\Delta>0$ donc 2 racines distinctes

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{25}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{25}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$-x^2+3x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		signe a		$-a$		signe de a	

On a donc $E =]-1;4[$

(2) On résout dans E

$$\begin{cases} \ln(-x^2+3x+4)=0 \\ x\in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\ln(-x^2+3x+4)} = e^0 \\ x\in E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x+4=1 \\ x\in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x+3=0 \\ x\in E \end{cases}$$

On résout $-x^2+3x+3=0$

$$\Delta = 3^2-4\times(-1)\times 3 = 21$$

$\Delta>0$ donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{21}}{-2} = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$$

et $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$

Or $x_1 \in E =]-1;4[$ et $x_2 \in E =]-1;4[$

donc $S = \left\{\dfrac{3-\sqrt{21}}{2} ; \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right\}$

Pour les exercices 54 à 56, l'équation proposée est de la forme $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$.
Déterminer l'ensemble E des nombres réels x tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$, puis résoudre dans E l'équation.

54 **a)** $\ln(2x-1) = \ln(3)$ **b)** $\ln(2x) = \ln(3x-12)$

55 **a)** $\ln(2-5x) = \ln(3x+4)$ **b)** $\ln\left(x^2\right) = \ln(3x)$

56 **a)** $\ln(-3x) = \ln(3x-4)$ **b)** $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x)$

54

a) Ensemble de résolution :

$\ln(2x-1)$ définie ssi $2x-1>0$

ssi $x>\frac{1}{2}$

On a donc $E = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

b) On résout dans E :

$$\begin{cases} \ln(2x-1) = \ln(3) \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\ln(2x-1)} = e^{\ln(3)} \\ x \in E \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=3 \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{2}=2 \\ x \in E \end{cases}$

On a $2 \in E$ donc $S=\{2\}$

b) (1) Ensemble de résolution

$\begin{cases} \ln(2x) \text{ définie} \\ \text{et } \ln(3x-12) \text{ définie} \end{cases}$ ssi $\begin{cases} 2x>0 \\ \text{et} \\ 3x-12>0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x>0 \\ \text{et} \\ x>\frac{12}{3}=4 \end{cases}$

On a donc $E=]4;+\infty[$

(2) On résout dans E

$\begin{cases} \ln(2x)=\ln(3x-12) \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\ln(2x)}=e^{\ln(3x-12)} \\ x \in E \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=3x-12 \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12=x \\ x \in E \end{cases}$

On a $12 \in E$ et donc $S=\{12\}$

55

a) (1) Ensemble de résolution

$$\begin{cases} \ln(2-5x) \text{ définie} \\ \text{et} \\ \ln(3x-4) \text{ définie} \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} 2-5x>0 \\ \text{et} \\ 3x-4>0 \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x<\frac{2}{5} \\ \text{et} \\ x>\frac{4}{3} \end{cases}$$

On a donc $E = \emptyset$

L'équation n'a donc pas de solution.

$$S = \emptyset$$

b) (1) Ensemble de résolution

$$\begin{cases} \ln(x^2) \text{ définie} \\ \text{et} \\ \ln(3x) \text{ définie} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2>0 \\ 3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ \text{et} \\ x>0 \end{cases}$$

On a donc $E =]0;+\infty[$.

(2) On résout dans E

$$\begin{cases} \ln(x^2) = \ln(3x) \\ \text{et} \\ x\in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\ln(x^2)} = e^{\ln(3x)} \\ \text{et} \\ x\in E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x \\ \text{et} \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3) = 0 \\ \text{et} \\ x \in E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} x = 0 \\ x > 0 \end{cases}}_{\text{impossible}} \text{ ou } \begin{cases} x = 3 \\ x > 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\mathcal{S} = \{3\}$

56

a) (1) Ensemble de résolution

$$\begin{cases} \ln(-3x) \text{ définie} \\ \text{et} \\ \ln(3x-4) \text{ définie} \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} -3x > 0 \\ \text{et} \\ 3x-4 > 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x < 0 \\ \text{et} \\ x > \frac{4}{3} \end{cases}$$

$E = \emptyset$

L'équation n'a donc pas de résolution.

b) (1) Ensemble de résolution

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{1}{x}\right) \text{ définie} \\ \text{et} \\ \ln(x) \text{ définie} \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} \frac{1}{x} > 0 \\ \text{et} \\ x > 0 \end{cases} \text{ ssi } x > 0$$

(2) On résout dans E

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{x} = x \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = x^2 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ x > 0 \end{cases} \text{ ou } \underbrace{\begin{cases} x = -1 \\ x > 0 \end{cases}}_{\text{impossible}}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $S = \{1\}$