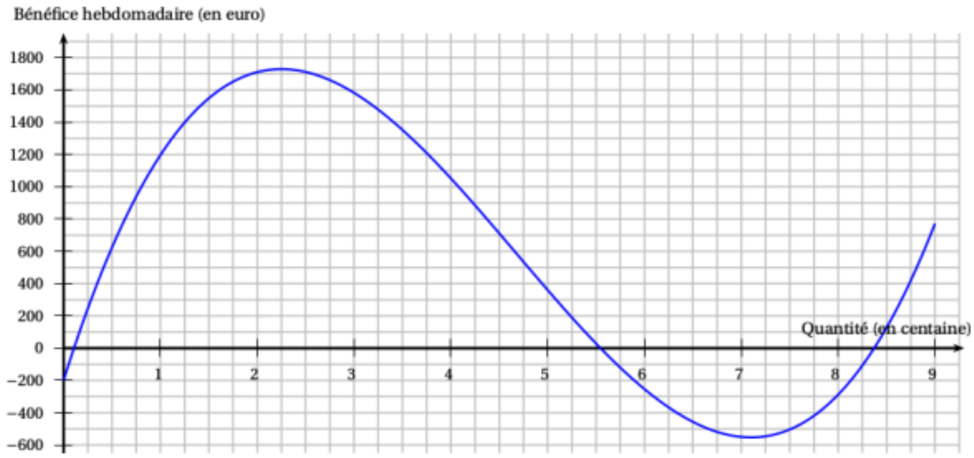
Capacité 7 *Encadrer la solution d'une équation par dichotomie*

Une entreprise fabrique et vend des brosses à dents connectées. On modélise le bénéfice en euro pour x centaines de brosses à dents fabriquées et vendues par semaine par la fonction B définie sur $[0;9]$ par :

$$B(x) = 40x^3 - 561x^2 + 1\,917x - 200$$

La courbe représentative du bénéfice hebdomadaire est donnée ci-dessous.



1. Justifier que la fonction B est dérivable sur $[0;9]$ et déterminer l'expression de $B'(x)$.
2. En déduire l'étude des variations de la fonction B sur l'intervalle $[0;9]$.
3. Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[8; 8{,}5]$.
4. Déterminer graphiquement une valeur approchée de α à 25 unités près.
5. Compléter le programme `Python` ci-dessous pour qu'en sortie de boucle, l'intervalle `[u , v]` constitue un un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 0,02.

```python
def B(x):
    return 40 * x ** 3 - 561 * x ** 2 + 1917 * x - 200

u = 8
v = 8.5
while v - u > 0.02:
    m = (u + v) / 2
    if B(m) >= 0:
        .... = m
    else:
        .... = m
```

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 40x^3 - 561x^2 + 1917x - 200$ definie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

0.2.1 Question 1 : Calcul de dérivée

In [7]:
```
#expression de f(x)
fexp = 40 * t**3 - 561*t**2 + 1917 * t - 200
fexp
```

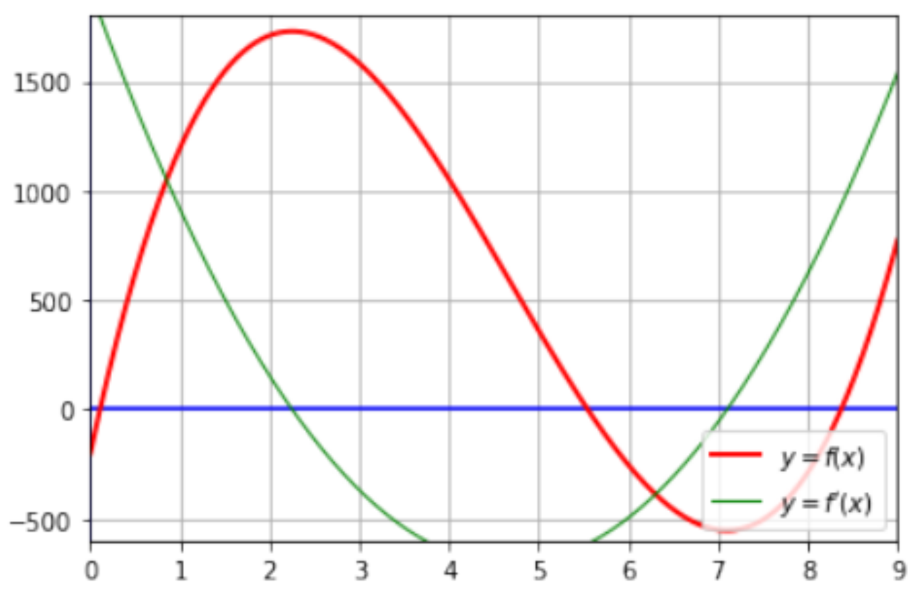
Out[7]:
$40t^3 - 561t^2 + 1917t - 200$

In [8]:
```
#expression de f'(x)
fprimexp = dérivée(fexp, t)
fprimexp
```


Out[8]:
$120t^2 - 1122t + 1917$

In [11]:
```
factoriser(fprimexp)
```

Out[11]:
$3(4t - 9)(10t - 71)$



0.2.3 Question 4 Existence de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[8;9]$

- $f : x \mapsto 40x^3 - 561x^2 + 1917x - 200$ est dérivable donc continue sur $[8;9]$
- $f(8) < 0$ et $f(9) > 0$
- f est strictement croissante sur $[8;9]$

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution α dans l'intervalle $[8;9]$

```python
def B(x):
    return 40 * x ** 3 - 561 * x ** 2 + 1917 * x - 200

u = 8
v = 8.5
while v - u > 0.02:
    m = (u + v) / 2
    if B(m) >= 0:
        v = m
    else:
        u = m
```

0.5.1 D'abord on s'arrete lorsque l'amplitude de l'intervalle $[a,b]$ est inférieure ou égale à $0,02$

```
In [29]: dicho_tab(f, 8, 9, 0.02, 0)
```

Etape	m	Choix ?	a	b
initialisation	None	None	8	9
1	8.5	gauche	8	8.5
2	8.25	droite	8.25	8.5
3	8.375	gauche	8.25	8.375
4	8.3125	droite	8.3125	8.375
5	8.34375	droite	8.34375	8.375
6	8.359375	droite	8.359375	8.375