Capacités du cours sur le logarithme népérien

Capacité 1 *Utiliser la fonction logarithme dans un contexte*

La magnitude d'un séisme d'amplitude maximale A est mesurée *l'échelle de Richter* par $M = \dfrac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{\ln(10)}$ où A_0 est une amplitude de référence. Cette formule s'écrit souvent $M = \log\left(\dfrac{A}{A_0}\right)$ où $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ est la fonction logarithme décimal (touche Log de la calculatrice).

1. Déterminer avec la calculatrice la magnitude sur l'échelle de Richter des séismes suivants :
   - **a.** Un séisme d'amplitude A_0.
   - **b.** Un séisme d'amplitude $10A_0$.
   - **c.** Un séisme d'amplitude $20A_0$.
   - **d.** Un séisme d'amplitude $10^n A_0$ avec n entier naturel. Quelle conjecture peut-on formuler ?
   - **e.** le séisme de Barcelonnette (France 2014) d'amplitude $A = 2 \times 10^5 A_0$.
2. Exprimer en fonction de A_0 l'amplitude maximale du séisme d'Amatrice (Italie 2016) dont la magnitude était de 6,2 sur l'échelle de Richter.
3. *L'échelle de Richter* est une **échelle logarithmique**, la valeur représentée sur l'échelle est le logarithme (népérien ou décimal) de la grandeur mesurée. D'autres exemples d'échelles logarithmiques sont présentés aux exercices 92 p. 148 (magnitude d'un astre) et 173 p. 256 (intensité sonore en décibels). Quel est l'intérêt d'une échelle logarithmique par rapport à une échelle linéaire ?

$\log(1) = 0$ ← séisme a

amplitude

$10\,A_0$

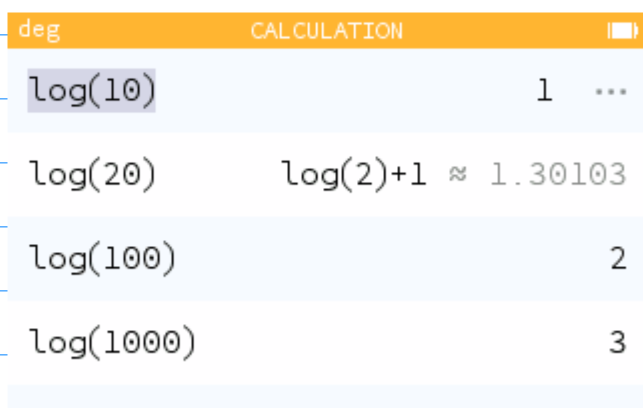
$\times 10$

$20\,A_0$

$100\,A_0$

$\times 10$

$1000\,A_0$



magnitude

1

$1 + \log(2) \simeq 1{,}3$ $+1$

2 $+1$

3

suite géométrique ⟷ suite arithmétique

$10^n A_0$

$\log\left(\dfrac{10^n A_0}{A_0}\right) = \log(10^n)$

$= n \log(10)$

deg CALCULATION

$\log(2\times10^5)$

$\log(2)+5 \approx 5.30103$

$10^{6.2}$

1584893

relation fondamentale du logarithme

$\log(2) + \log(10^n)$

deg CALCULATION

1584893

$\log(10^{6.2})$ 6.2

$e^{\ln(10)\times 6.2}$

1584893

magnitude du séisme d'Amatrice

$\frac{A}{A_0}$ pour le séisme d'Amatrice

$$\text{amplitude} \xrightarrow{\text{logarithme}} \text{magnitude}$$

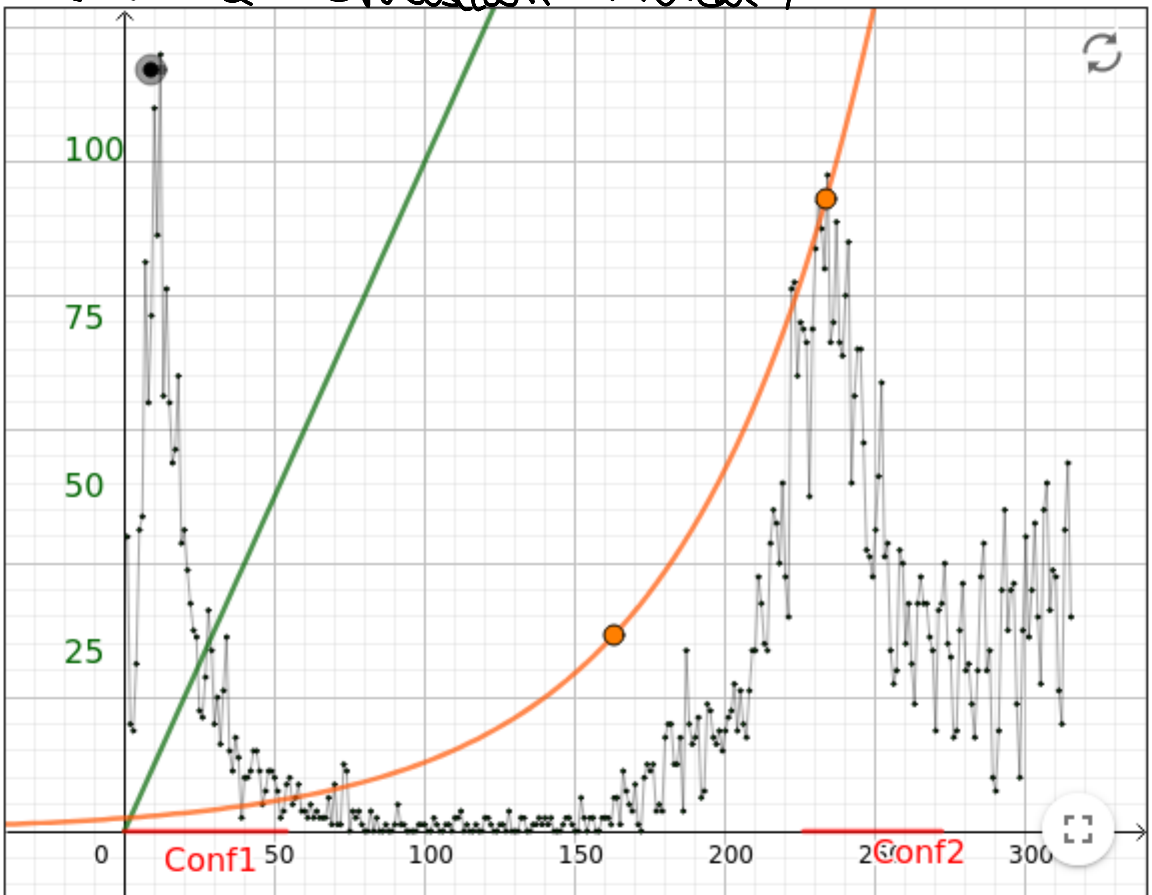
$$A \longrightarrow M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

$$\frac{A}{A_0} = 10^M = 10^{\log\left(\frac{A}{A_0}\right)}$$

ou $\frac{A}{A_0} = e^{\ln(10)\times M} = e^{\ln(10)\times \frac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{\ln(10)}}$

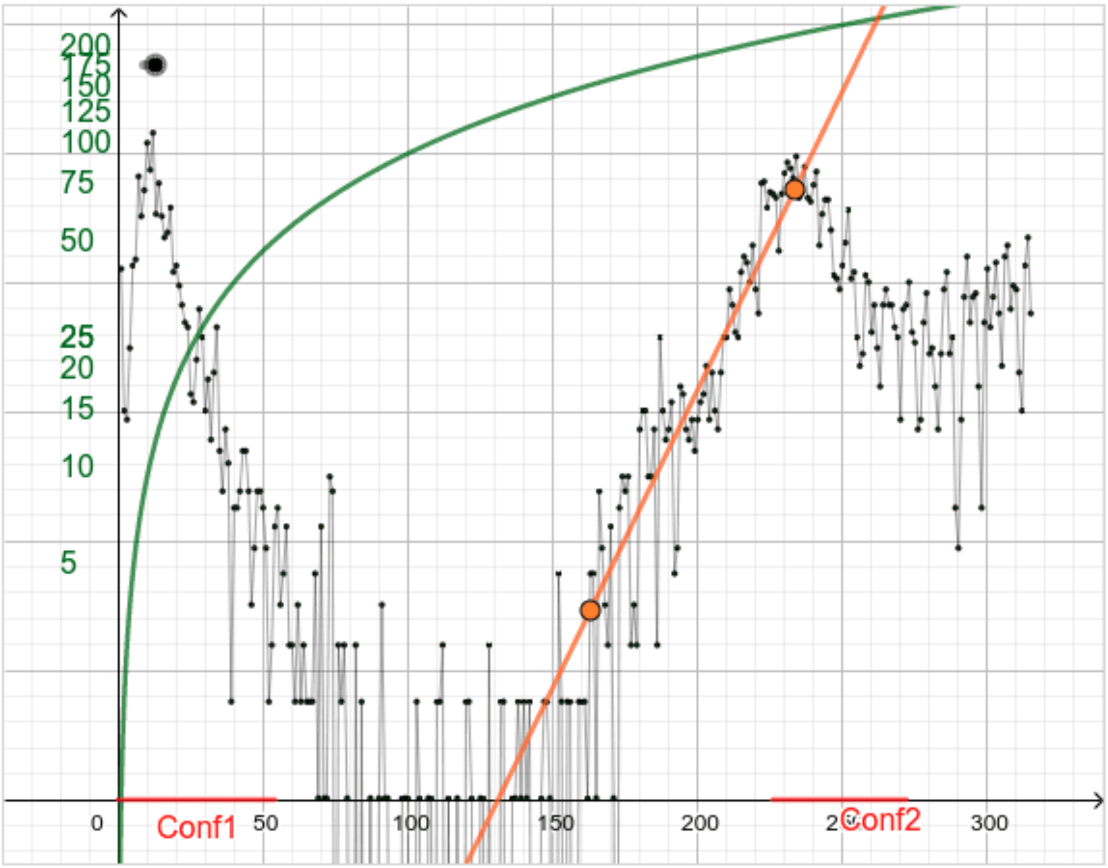
$$\text{amplitude} \xleftarrow{\text{exponentielle}} \text{magnitude}$$

3) Nombre d'admissions en réanimation en région AURA entre mars 2020 et mars 2021 (source Christian Mercat)



échelle linéaire en abscisse et en ordonnée

3) Nombre d'admissions en réanimation en région AURA entre mars 2020 et mars 2021 (source Christian Mercat)



échelle linéaire en abscisse et logarithmique en ordonnée

↳ l'évolution exponentielle avant le second confinement est mise en évidence par une relation affine entre le nombre de jours et le logarithme du nombre d'admissions

Capacité 2 ***Utiliser la définition de la fonction logarithme***

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

   a. $f : x \mapsto \ln(1-3x)$ b. $g : x \mapsto \ln(x^2)$

2. Compléter les pointillés :

   a. $e^{\ln(3)} = \cdots$ c. $\ln(e^{-7}) = \cdots$ e. $\ln(e^2 \times e^3) = \cdots$

   b. $\ln(e^0) = \cdots$ d. $\ln(e^2) + \ln(e^3) = \cdots$ f. $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \cdots$

1)

a) $f(x) = \ln(1-3x)$ définie ssi $1-3x > 0$

ssi $x < \frac{1}{3}$

$D_f =]-\infty ; \frac{1}{3}[$

b) $g(x) = \ln(x^2)$ définie ssi $x^2 > 0$

ssi $x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$D_g =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

2) a) $e^{\ln(3)} = 3$ c) $\ln(e^{-7}) = -7$ b) $\ln(e^0) = 0$

d) $\ln(e^2) + \ln(e^3) = 2+3 = 5$

f) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln(e^{-2}) = -2 = -\ln(e^2)$.

remarque

Capacité 3 ***Utiliser les propriétés de la fonction logarithme***

Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto x\ln(x) - x$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

g dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables.

Pour tout réel $x > 0$:

$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	$g(1) = 1\times\ln(1) - 1 = -1$	↗	

Capacité 4 ***Résoudre des équations ou inéquations avec la fonction logarithme***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations :

1. $\ln(2x-4) < 0$
2. $\ln(2x-4) > -5$
3. $\ln(2x) \geqslant \ln(x^2-1)$
4. $(\ln x)^2 - \ln x = 6$
5. $e^{2x} - e^x = 6$
6. $(\ln x)^2 - \ln x < 6$
7. $\left(e^{-x}\right)^2 - e^{-x} < 6$
8. $e^{3-2x} > 2\left(e^x\right)^2$

1) Inéquation : $\ln(2x-4) < 0$

Ensemble de résolution : $2x - 4 > 0 \iff x > 2$

$\mathcal{D} =]2;+\infty[$.

Résolution dans $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} \ln(2x-4) < 0 \\ 2 < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\ln(2x-4)} < e^{0} \\ 2 < x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 < 1 \\ 2 < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ 2 < x \end{cases}$$

Ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \left]2 ; \frac{5}{2}\right[$.

3) Inéquation : $\ln(2x) \geq \ln(x^2-1)$

Ensemble de résolution : $\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[\end{cases}$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

On résout dans $\mathcal{D} =]1 ; +\infty[$

Résolution dans $\mathcal{D} =]1 ; +\infty[$

$$\begin{cases} \ln(2x) \geq \ln(x^2-1) \\ 1 < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq x^2 - 1 \\ 1 < x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 \leq 0 \\ x > 1 \end{cases}$ Les racines de $x^2 - 2x - 1$ sont $x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

$\mathcal{D}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $]1 ; 1+\sqrt{2}]$.

2) Inéquation : $\ln(2x-4) > -5$

Ensemble de résolution : $2x-4>0 \iff x>2$

$$\mathcal{D} =]2 ; +\infty[$$

Résolution dans $\mathcal{D} =]2 ; +\infty[$.

$$\begin{cases} \ln(2x-4) > -5 \\ x>2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-4 > e^{-5} \\ x>2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2 + \dfrac{e^{-5}}{2} \\ x>2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left]2 + \frac{e^{-5}}{2} ; +\infty\right[.$$

4) Équation : $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 6$

Ensemble de résolution : $\mathcal{D} =]0 ; +\infty[$

On résout dans $\mathcal{D} =]0;+\infty[$ avec un changement d'inconnue :

$$\begin{cases} (\ln(x))^2 - \ln(x) = 6 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X^2 - X - 6 = 0 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases}$$

$X^2 - X - 6$ a pour racines $X_1 = -2$ et $X_2 = 3$

$$\begin{cases} X^2 - X - 6 = 0 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = X \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3 = X \\ X = \ln(x \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\iff x = e^{-2} \text{ ou } x = e^3$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{e^{-2}; e^3\}$

5) Équation : $e^{2x} - e^x = 6$

Ensemble de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$e^{2x} - e^x = 6 \iff \begin{cases} X^2 - X - 6 = 0 \\ X = e^x \end{cases}$$

D'après 6) : $\begin{cases} X^2 - X - 6 = 0 \\ X = e^x \end{cases} \iff -2 = e^x$ ou $3 = e^x$

Une exponentielle est toujours positive, donc $e^x = -2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

et $e^x = 3 \iff x = \ln(3)$

$$S = \{\ln(3)\}.$$

6) Inéquation : $(\ln(x))^2 - \ln(x) < 6$

Ensemble de résolution : $D =]0;+\infty[$

On résout dans $]0;+\infty[$:

$$\begin{cases} (\ln(x))^2 - \ln(x) < 6 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X^2 - X - 6 < 0 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases}$$

X	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$X^2 - X - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $\begin{cases} X^2 - X - 6 < 0 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X < -2 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} X > 3 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases}$

$\iff x < e^{-2}$ ou $x > e^3$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} =]-\infty ; e^{-2}[\cup]e^{3} ; +\infty[.$$

7) Inéquation : $(e^{-x})^2 - e^{-x} < 6$

Ensemble de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$(e^{-x})^2 - e^{-x} < 6 \iff \begin{cases} X^2 - X - 6 < 0 \\ X = e^{-x} \end{cases}$$

d'après question 6)

$$\iff \underbrace{\begin{cases} X < -2 \\ X = e^{-x} \end{cases}}_{\text{pas de solution car } e^{-x} > 0} \text{ ou } \begin{cases} X > 3 \\ X = e^{-x} \end{cases}$$

$$\iff e^{-x} > 3 \iff -x > \ln(3)$$

$$\iff x < -\ln(3)$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} =]-\infty ; -\ln(3)[$$

8) Inéquation: $e^{3-2x} > 2(e^{x})^2$

Ensemble de résolution : $\mathbb{R}$

Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$e^{3-2x} > 2(e^{x})^2 \iff e^{3-2x} > 2e^{2x}$$

$$\iff e^{3-2x} > e^{\ln(2)} e^{2x}$$

$$\iff e^{3-2x} > e^{2x+\ln(2)}$$

$$\iff 3-2x > 2x+\ln(2)$$

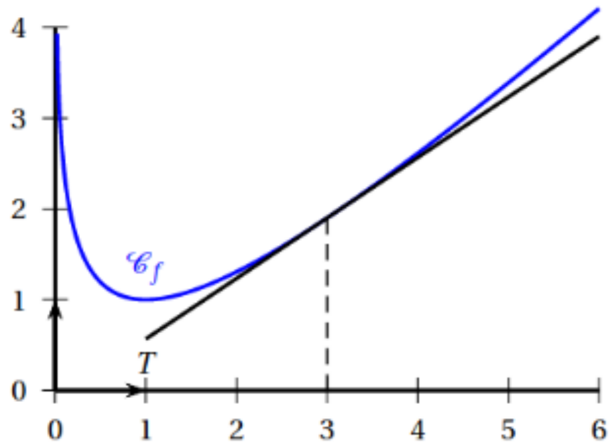
$$\iff \frac{3-\ln(2)}{4} > x$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{3-\ln(2)}{4}\right[.$$

Capacité 5 *Étudier la convexité d'une fonction*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = 3$.



1. Cette tangente T à $\mathscr{C}_f$ passe-t-elle par l'origine du repère?
2. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1) Équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 :

$$y = f'(3) \times (x-3) + f(3)$$

f dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Pour tout réel $x > 0$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

On en déduit que $f'(3) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $f(3) = 3 - \ln(3)$

Une équation de T est donc :

$$y = \frac{2}{3}(x-3) + 3 - \ln(3)$$

Le point d'abscisse 0 de T a pour ordonnée :

$$\frac{2}{3}\times(3-3)+3-\ln(3) = 3-\ln(3)$$

$3 \neq e^3$ donc $3-\ln(3) \neq 0$

L'origine du repère n'appartient donc pas à T

2) f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions deux fois dérivables sur $]0;+\infty[$.

Pour tout réel $x>0$, on a :

$$f(x) = x - \ln(x)$$

donc $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

donc $f''(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$

Ainsi pour tout $x>0$, on a $f''(x)>0$

et f est donc convexe sur $]0;+\infty[$

Par propriété d'une fonction convexe, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes et en particulier de T.

Algorithmique 1 *Application de l'équation fonctionnelle du logarithme aux suites géométriques*

On estime que la population d'oiseaux d'une réserve diminue de 5% par an. Cette population est estimée en 2020 à 60000 individus.
On note u_n la population d'oiseaux en $2020+n$.

1. **a.** Justifier que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

   b. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que `seuil(k)` détermine le nombre d'années minimum au bout duquel on aura $u_n < k$.

```
def seuil(k):
    u  = 60000
    n = 0
    while u >= k :
        u = 0.95*u
        n = n+1
    return n
```

   c. Avec la calculatrice, déterminer la valeur de `seuil(30000)`.

2. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

   a. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la nature de (v_n).

   b. Retrouver la valeur de `seuil(30000)` en résolvant une inéquation.

1) a) Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{5}{100}\right) \times u_n = 0,95 \times u_n$$

b)

```python
def seuil(k):
    u = 60000
    n = 0
    while u >= k:
        u = 0.95 * u
        n = n + 1
    return n

print(seuil(30000))
```

```
Python 3.8.2 (default, Dec 25 2020
21:20:57)
Type "help", "copyright", "credits"
 or "license" for more information.
>>> def seuil(k):
...     u = 60000
...     n = 0
...     while u >= k:
...         u = 0.95 * u
...         n = n + 1
...     return n
...
... print(seuil(30000))
14
>>>
```

2) a) Pour tout entier naturel $n \geq 0$:

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(0{,}95\ u_n)$$

$$v_{n+1} = \ln(0{,}95) + \ln(u_n)$$

$$v_{n+1} = \ln(0{,}95) + v_n$$

La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est donc arithmétique de raison $\ln(0{,}95)$.

a) On résout l'inéquation :

$$u_n < 30000 \iff \ln(u_n) < \ln(30000)$$

$$u_n < 30000 \iff v_n < \ln(30000)$$

Or $(v_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique de raison $\ln(0,95)$ et de premier terme $v_0 = \ln(60000)$

donc pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$v_n = \ln(60000) + n \times \ln(0,95)$$

On a donc :

$$v_n < \ln(30000) \iff \ln(60000) + n \times \ln(0,95) < \ln(30000)$$

$$\iff n \times \ln(0,95) < \ln(30000) - \ln(60000)$$

or $0 < 0,95 < 1$ donc $\ln(0,95) < 1$

On a donc :

$$v_n < \ln(30000) \iff n > \frac{\ln(30000) - \ln(60000)}{\ln(0,95)}$$

De plus $\ln(30000) - \ln(60000) = \ln\left(\frac{30000}{60000}\right) = \ln(0,5)$

donc : $v_n < \ln(30000) \iff n > \dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}$

Or $\dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)} \underset{\text{arrondi}}{\approx} 14$ donc seuil(30000) renvoie 14

Capacité 6 ***Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme pour simplifier une expression***

Exprimer en fonction de ln(3), ln(5) ou d'un entier :

1. $\ln(15)$
2. $\ln(75)$
3. $\ln(0,6)$
4. $\ln\left(e^{\ln(5/3)}e^{\ln(3)}\right)$
5. $\ln(\sqrt{15})$
6. $\ln(3^4)\ln(5e)$

1) $\ln(15) = \ln(3\times 5) = \ln(3) + \ln(5)$

2) $\ln(75) = \ln(3\times 5^2) = \ln(3) + \ln(5^2)$

$\ln(75) = \ln(3) + 2\ln(5)$

3) $\ln(0,6) = \ln\left(\frac{6}{10}\right) = \ln\left(\frac{3}{5}\right) = \ln(3) - \ln(5)$

4) $\ln\left(e^{\ln(5/3)}e^{\ln(3)}\right) = \ln\left(e^{\ln(\frac{5}{3}) + \ln(3)}\right)$

$= \ln\left(e^{\ln(\frac{5}{3}\times 3)}\right)$

$= \ln\left(e^{\ln(5)}\right) = \ln(5)$

5) $\ln(\sqrt{15}) = \frac{1}{2}\ln(15) = \frac{1}{2}\ln(3\times 5)$

$\ln(\sqrt{15}) = \frac{1}{2}\left(\ln(3) + \ln(5)\right)$

6) $\ln(3^4)\ln(5e) = (4\ln(3))\times(\ln(5) + \ln(e))$

$\ln(3^4)\ln(5e) = 4\ln(3)\times(\ln(5) + 1)$

Capacité 7 ***Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme pour résoudre une équation ou une inéquation***

1. Résoudre les équations ou inéquations suivantes en déterminant d'abord l'ensemble de résolution :

a. $\ln(x+3)+\ln(x-2)=\ln 6$

b. $\ln((x+3)(x-2)) \leqslant 2\ln\left(\sqrt{6}\right)$

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

a. $0,8^n \leqslant 10^{-4}$ avec $n \in \mathbb{N}$

b. $1,02^n > 10^{2019}$

3. *Un problème de Leonhard Euler :*

Si le nombre des hommes est doublé tous les 100 ans, quel est l'accroissement annuel ?

1) Équation : $\ln(x+3)+\ln(x-2)=\ln(6)$

Ensemble de résolution :

$$\begin{cases} x+3>0 \\ \text{et} \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ \text{et} \\ x>2 \end{cases}$$

$$\mathcal{D} =]-3;+\infty[\cap]2;+\infty[=]2;+\infty[$$

On résout dans $]2;+\infty[$:

$$\begin{cases} \ln(x+3)+\ln(x-2)=\ln(6) \\ 2<x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln((x+3)(x-2))=\ln(6) \\ 2<x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2)=6 \\ 2<x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-12=0 \\ 2<x \end{cases}$$

On détermine les racines de x^2+x-12 :

$$\Delta = b^2-4ac = 1-4\times(-12)=49$$

$\Delta>0$ 2 racines $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{49}}{2} = -4 \\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{49}}{2} = 3 \end{cases}$

Seule 3 est dans l'ensemble de résolution $]2;+\infty[$, donc :

$$\mathcal{S} = \{3\}$$

1) b) Inéquation : $\ln\big((x+3)(x-2)\big) \leq 2\ln(\sqrt{6})$

Ensemble de résolution :

$(x+3)(x-2) > 0 \iff x < -3$ ou $x > 2$

$$\mathcal{D} =]-\infty ; -3[\cup]2 ; +\infty[$$

On résout dans $]-\infty ; -3[\cup]2 ; +\infty[$

$$\begin{cases} \ln\big((x+3)(x-2)\big) \leq 2\ln(\sqrt{6}) \\ x \in \mathcal{D} \end{cases} \iff \begin{cases} (x+3)(x-2) \leq \sqrt{6}^2 \\ x \in \mathcal{D} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + x - 12 \leq 0 \\ x \in \mathcal{D} \end{cases}$$

$\mathcal{D}$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{D}$

x	$-\infty$		-4		-3	2	3		$+\infty$
x^2+x-12		$+$	0	$-$			0	$+$	

solutions

On en déduit que $\mathcal{S} =]-4 ; -3[\cup]2 ; 3[$

2) a) $0{,}8^n \leq 10^{-4} \iff \ln(0{,}8^n) \leq \ln(10^{-4})$

$\iff n\ln(0{,}8) \leq \ln(10^{-4})$

On $0 < 0{,}8 < 1$ donc $\ln(0{,}8) < 0$

On a donc :

$$0{,}8^n \leq 10^{-4} \iff n \geq \frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0{,}8)}$$

$$\frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0{,}8)} \simeq 41{,}3 \simeq 42 \text{ par excès}$$

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'ensemble des solutions est : $[\![42;+\infty[\![$ (Intervalle d'entiers

b) $1{,}02^n > 10^{2019} \iff \ln(1{,}02^n) > \ln(10^{2019})$

$$\iff n\ln(1{,}02) > 2019\ln(10)$$

$1{,}02 > 1$ donc $\ln(1{,}02) > 1$

$$1{,}02^n > 10^{2019} \iff n > \frac{2019\ln(10)}{\ln(1{,}02)}$$

$$\frac{2019\ln(10)}{\ln(1{,}02)} \simeq 234762{,}8 \simeq 234763 \text{ par excès}$$

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'ensemble des solutions est : $[\![234763;+\infty[\![$

Capacité 8 ***Utiliser les propriétés de la fonction logarithme***

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1; 25]$ par

$$f(x) = \frac{x+2-\ln(x)}{x}.$$

   a. On admet que f est dérivable sur $[1; 25]$.
   Démontrer que pour tout réel x appartient à l'intervalle $[1; 25]$,

$$f'(x) = \frac{-3+\ln(x)}{x^2}.$$

   b. Résoudre dans $[1; 25]$ l'inéquation $-3+\ln(x) > 0$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[1; 25]$.

   d. Démontrer que dans l'intervalle $[1; 25]$, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une seule solution. On notera α cette solution.

   e. Déterminer un encadrement d'amplitude $0,01$ de α à l'aide de la calculatrice.

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéoprojecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.

   On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.

   En utilisant les résultats obtenus à la question **1.** :

   a. Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal.
   Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

   b. Déterminer le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euro.

   c. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.

1) a) Soit u et v définies sur $[1;25]$ par :

$u(x) = x+2-\ln(x)$ et $v(x) = x$

u et v sont dérivables sur $[1;25]$

Pour tout $x \in [1;25]$ on a

$u'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$

$$f = \frac{u}{v} \quad \text{donc} \quad f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Pour tout $x \in [1;25]$, on a :

$$f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \times x - (x + 2 - \ln(x)) \times 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x - 1 - (x + 2 - \ln(x))}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 3}{x^2}$$

b) On résout dans $[1;25]$:

$$\begin{cases} -3 + \ln(x) > 0 \\ 1 \leq x \leq 25 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(x) > 3 \\ 1 \leq x \leq 25 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > e^3 \\ 1 \leq x \leq 25 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3 + \ln(x) > 0$ est donc $\left]e^3 ; 25\right]$

c)

x	1		e^3		25
$-3+\ln(x)$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	$f(e^3)$	↗	$\frac{27}{25} - \frac{\ln(25)}{25}$

$$f(e^3) = \frac{e^3 - 1}{e^3} = 1 - e^{-3}$$

c) • $f(25) < 1,5$ et f croissante sur $[e^3 ; 25]$
donc $f(x) = 1,5$ n'a pas de solution
dans $[e^3 ; 25]$.

• f est dérivable donc continue sur $[1 ; e^3]$
• $f(1) > 1,5 > f(e^3)$ donc $1,5$ est une valeur intermédiaire entre $f(1)$ et $f(e^3)$
• f strictement décroissante sur $[1 ; e^3]$

D'après un corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 1,5$ a une unique solution α sur $[1 ; e^3]$.

e) Encadrons α par balayage avec un pas progressif :

rad GRAPHER

Expressions | Graph | Table

Set the interval

x	f(x)
1	3
2	1.653426
3	1.300463
4	1.153426
5	1.078112
6	1.034707
7	1.007727

$2 < \alpha < 3$

rad GRAPHER

Expressions | Graph | Table

Set the interval

x	f(x)
2	1.653426
2.1	1.599077
2.2	1.550701
2.3	1.507431
2.4	1.468555
2.5	1.433484
2.6	1.401726

$2{,}3 < \alpha < 2{,}4$

rad GRAPHER

Expressions | Graph | Table

Set the interval

x	f(x)
2.3	1.507431
2.31	1.503356
2.32	1.499324
2.33	1.495336
2.34	1.491388
2.35	1.487483
2.36	1.483618

$2{,}31 < \alpha < 2{,}32$

2)

a) Coût moyen minimal pour une production de e^3 centaines de pièces

$e^3 \simeq 20{,}09$ centaines
soit 2009 unités

b) On résout l'inéquation $f(x) \leq 1{,}5$.

D'après le tableau de variations de f, l'ensemble des solutions est $[\alpha ; 25]$. Il faut produire au moins α centaines de pièces

soit 2,32 centaines de pièces au moins

x	1		α		e^3		25
$f(x)$	3	$\searrow$	$1{,}5$	$\searrow$	$\dfrac{e^3-1}{e^3}$	$\nearrow$	$f(25)<1{,}5$

c) Le coût moyen minimal est de

$$\frac{e^3-1}{e^3} = 1 - \frac{1}{e^3} > 1 - \frac{1}{2^3} = 1 - 0{,}125 = 0{,}875 \text{ euros}$$

Le coût moyen d'une pièce ne peut donc être de 50 centimes $= 0{,}5$ euros

Capacité 9 ***Résoudre un problème en utilisant les propriétés de la fonction logarithme***

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0;1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;1[$ et déterminer ses limites aux bornes de son intervalle de définition.

2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

1) Pour tout $x \in]0;1[$:

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

$$f(x) = 30\left(\ln(20) + \ln(x) - \ln(1-x)\right)$$

f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in]0;1[$:

$$f'(x) = 30 \times \left(\frac{1}{x} - \frac{-1}{1-x}\right)$$

$$f'(x) = 30 \times \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

Pour tout $x \in]0;1[$ on a $x > 0$ et $1-x > 0$

donc $\frac{1}{x} > 0$ et $\frac{1}{1-x} > 0$

et donc $f'(x) > 0$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0;1[$.

- On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{20x}{1-x} = 0^+$ par quotient

et $\lim\limits_{y \to 0^+} \ln(y) = -\infty$

donc par composition, on a :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = -\infty$$

- On a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{20x}{1-x} = +\infty$ par quotient

et $\lim\limits_{y \to +\infty} \ln(y) = +\infty$

donc par composition $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 30\ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right) = +\infty$

2) On résout dans $]0;1[$ l'inéquation :

$$\begin{cases} 20 \leq f(x) \leq 120 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \leq \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) \leq 4 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2/3} \leq \frac{20x}{1-x} \leq 4 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)\,e^{2/3} \leq 20x \leq 4(1-x) \quad \text{car } 1-x>0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2/3} \leq (20+e^{2/3})\,x \\ 0<x<1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 24x \leq 4 \\ 0<x<1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e^{2/3}}{20+e^{2/3}} \leq x \\ 0<x<1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x \leq \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \\ 0<x<1 \end{cases}$$

on a $\dfrac{e^{2/3}}{20+e^{2/3}} \simeq 0,084$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{2/3}}{20+e^{2/3}} \leq x \leq \dfrac{1}{6} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Le modèle reste conforme pour un diamètre $x \in \left[\dfrac{e^{2/3}}{20+e^{2/3}} ; \dfrac{1}{6}\right]$