Calcul intégral

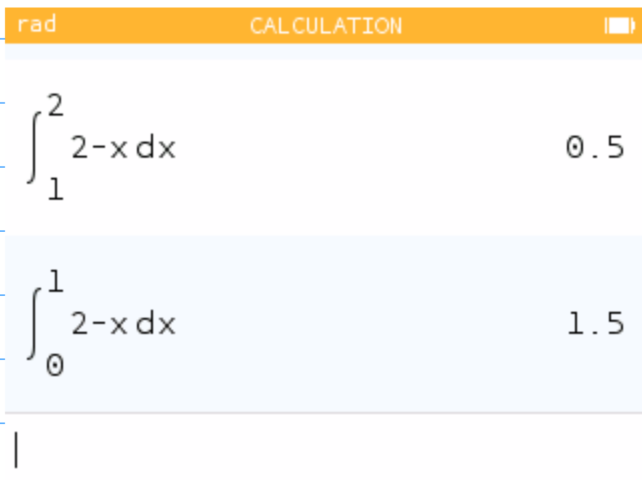
Capacité 1 *Calculs d'aires élémentaires, voir capacité 1 p.331*

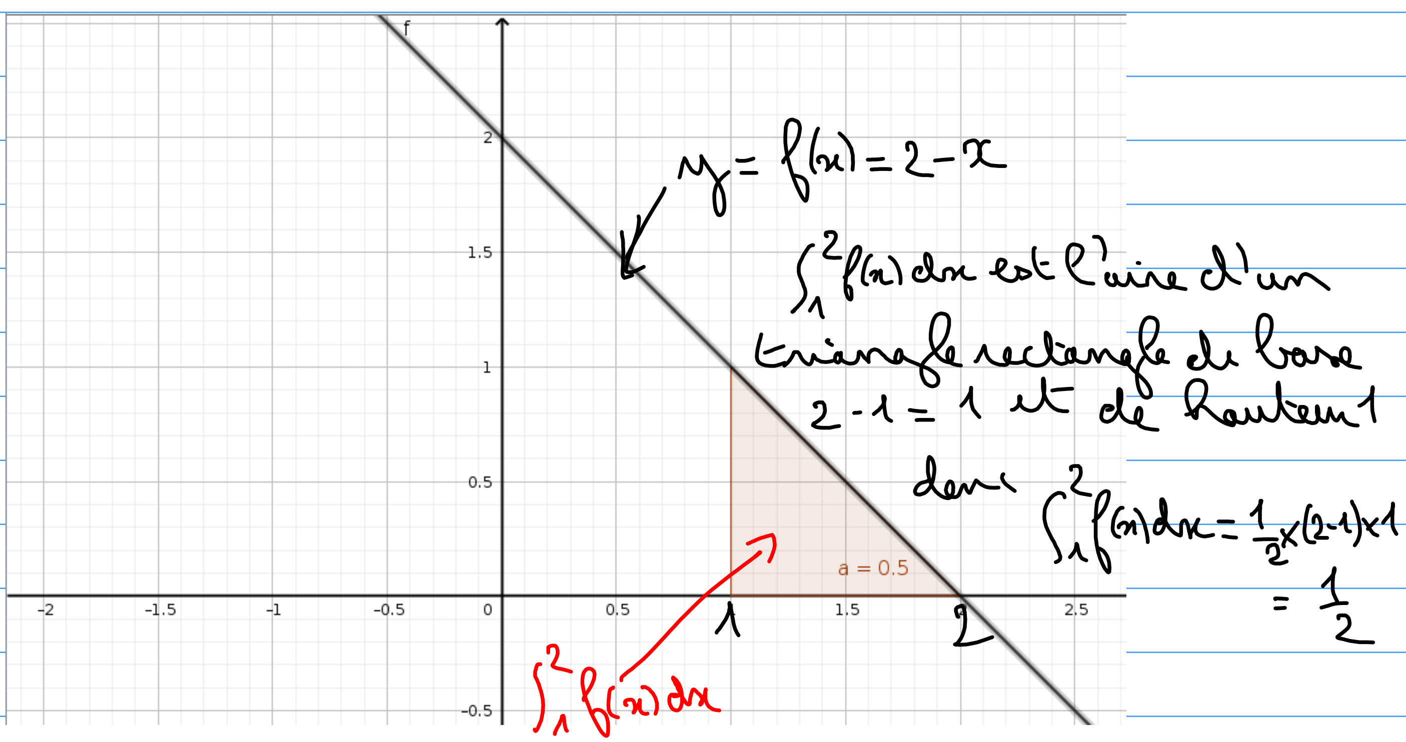
Soit f la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = 2 - x$.

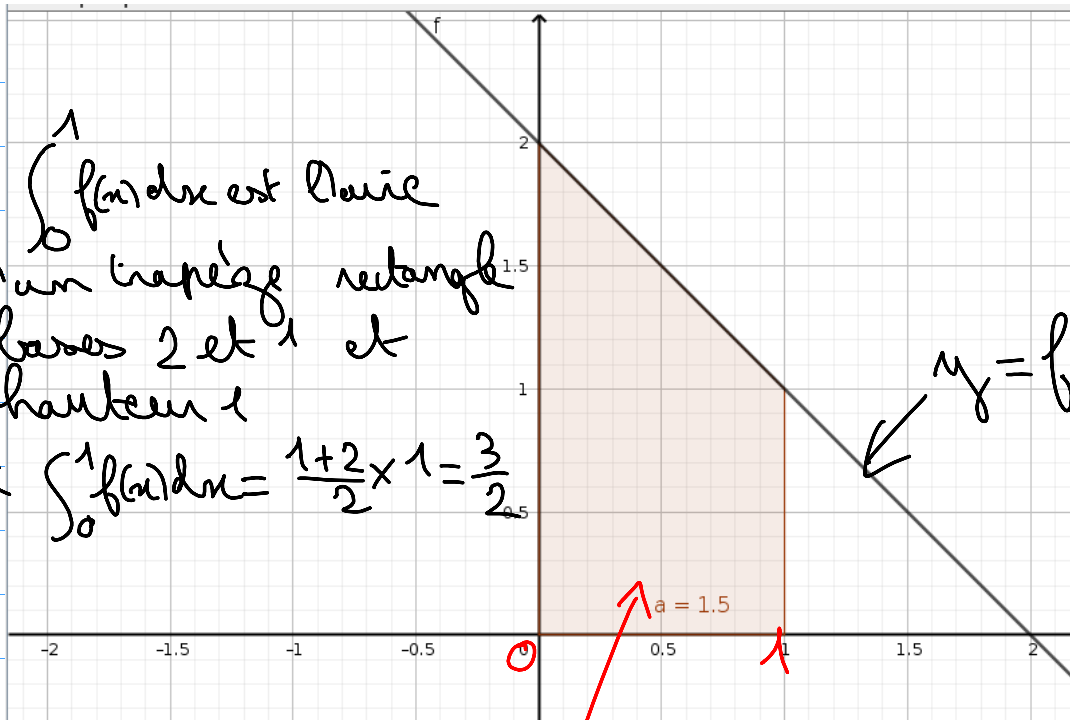
1. Représenter les surfaces dont les aires, en unités d'aire, sont égales aux intégrales :

$$I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } J = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Calculer ces intégrales et vérifier avec la calculatrice.







$\int_0^1 f(x)dx$ est l'aire d'un trapèze rectangle de bases 2 et 1 et de hauteur 1

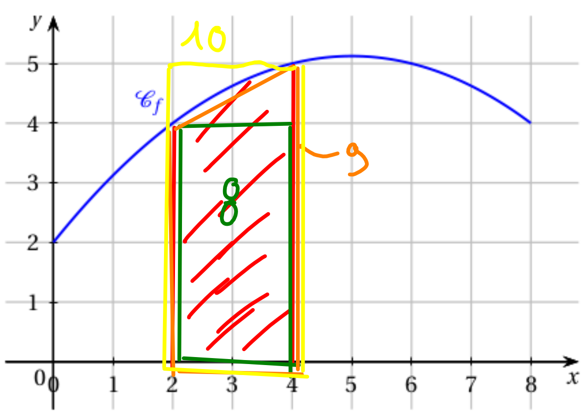
donc $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1+2}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$

$y = f(x) = 2 - x$

$\int_0^1 f(x)dx$

Capacité 2 ***Interpréter une aire comme une intégrale***

On considère une fonction f définie sur $[0\,;8]$ dont $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative dessinée ci-dessous :



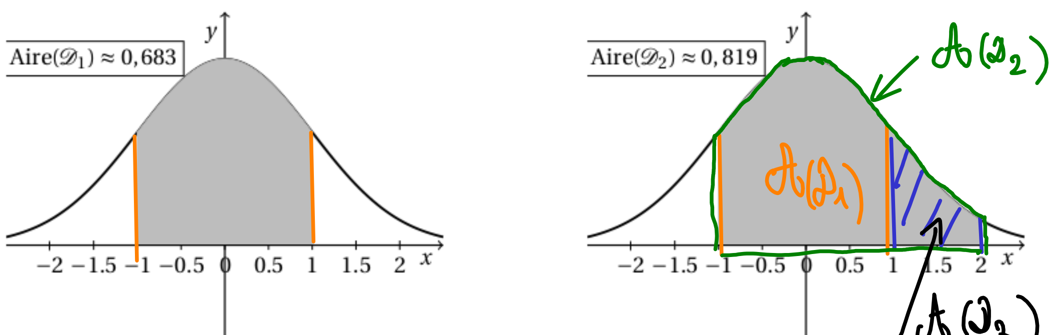
Choisir la bonne réponse :

A. $8 \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 9$	**B.** $9 \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 10$
C. $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = f(4) - f(2)$	**D.** $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$

Capacité 3 ***Utiliser la relation de Chasles et l'additivité des aires***

La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et on donne ci-dessous des valeurs approchées à 0,001 près :

- de l'aire du domaine $\mathscr{D}_1$ délimité par les droites d'équations $x=-1$, $x=1$, $y=0$ et par la courbe d'équation $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$;
- de l'aire du domaine $\mathscr{D}_2$ délimité par les droites d'équations $x=-1$, $x=2$, $y=0$ et par la courbe d'équation $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.



En déduire une valeur approchée à 0,002 près (les erreurs s'ajoutent) de l'intégrale :

$$\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Posons $\mathcal{A}(\mathscr{D}_3) = \int_1^2 g(x)\,dx$

Par additivité des aires, on a : $\mathcal{A}(\mathscr{D}_1) + \mathcal{A}(\mathscr{D}_3) = \mathcal{A}(\mathscr{D}_2)$

Ce qui se traduit par une relation de Chasles avec les intégrales :

$$\int_{-1}^1 g(x)\,dx + \int_1^2 g(x)\,dx = \int_{-1}^2 g(x)\,dx$$

et donc $\int_1^2 g(x)\,dx = \int_{-1}^2 g(x)\,dx - \int_{-1}^1 g(x)\,dx$

$$\int_1^2 g(x)\,dx \simeq 0,819 - 0,683 \simeq 0,136$$

Capacité 4 ***Programmer la méthode des rectangles, voir manuel page 170 et exo 77 p.182***

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle $[a; b]$.

1. Compléter les fonctions `Python` ci-dessous pour qu'elles retournent une approximation de $\int_a^b f(x)\,dx$ par la somme de rectangles à gauche construits sur n subdivisions régulières de l'intervalle $[a; b]$.

```
def rectangleGauche(f, a, b, n):
    s = 0
    pas = (b - a)/n
    x = a
    for k in range(n):
        s = s + f(x) * pas
        x = x + pas
    return s
```

```
def rectangleGauche2(f, a, b, n):
    s = 0
    pas = (b - a) / n
    for k in range(n):
        s = s + f(a + k*pas) * pas
    return s
```

2. Écrire une fonction `rectangleDroite(f, a, b, n)` qui retourne une approximation de $\int_a^b f(x)\,dx$ par la somme de rectangles à droite construits sur n subdivisions régulières de l'intervalle $[a; b]$.

Capacité 5 *Étudier une fonction définie par une intégrale*

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.
On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.
Le modèle mathématique est : $f(t) = 20\mathrm{e}^{-0,1t}$, avec $t \in [0\,;\,+\infty[$.
La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20\ \mu$g.L^{-1}.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.

   Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.

2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu$g.L^{-1}.

   Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

3. En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en μg.L^{-1}, le nombre $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Vérifier que pour ce modèle, l' ASC est égal à 200 μg.L^{-1}.

1) Soit $t_{0,5}$ la demi-vie.
Par définition, $t_{0,5}$ est solution de l'équation

$$f(t) = \frac{1}{2}\times f(0) = \frac{1}{2}\times 20 = 10$$

$$\Leftrightarrow \quad 20e^{-0,1t} = 10$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-0,1t} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -0,1t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln(2)}{0,1} \simeq 6,93 \text{ heures}$$

On a donc $t_{0,5} \simeq 6,93$ h.

2) On résout l'inéquation :

$$f(t) \leq 0{,}2$$

$$\Leftrightarrow \quad 20\, e^{-0{,}1t} < 0{,}2$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-0{,}1t} < \frac{0{,}2}{20}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-0{,}1t} < \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow \quad -0{,}1t < \ln(0{,}01)$$

$$\Leftrightarrow \quad t > \frac{\ln(0{,}01)}{-0{,}1}$$

$$\frac{\ln(0{,}01)}{-0{,}1} \simeq 46{,}1 \text{ h}$$

Le médicament est éliminé au bout de 46,1 h.

3) La fonction $F : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$

est une primitive de f sur $[0;+\infty[$

Pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 20e^{-0{,}1x}$

donc une primitive de f est de la forme

$x \longmapsto 20 \times \frac{1}{-0,1} e^{-0,1x} + k$

avec k constante.

Il existe donc une constante k telle que pour tout réel $x \geq 0$:

$$\int_0^x f(t)\,dt = -200 e^{-0,1x} + k$$

Pour $x = 0$, $\int_0^0 f(t)\,dt = 0$

donc $-200 \times e^{-0,1 \times 0} + k = 0$

ce qui équivaut à $k = 200$

On a donc pour tout réel $x \geq 0$:

$$\int_0^x f(t)\,dt = 200 - 200 e^{-0,1x}$$

Enfin $\lim\limits_{x \to +\infty} -0,1x = -\infty$

et $\lim\limits_{y \to -\infty} e^{y} = 0$

donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0,1x} = 0$

Finalement, par somme :

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt = 200$

L'ASC est donc bien égale à 200 µg/L.

Capacité 6 ***Vérifier qu'une fonction est une primitive***

Soit la fonction f définie sur $[0,5;10]$ par $f(x) = -x^2 - 4x + 15 + 6\ln(x)$.
Soit la fonction F définie et dérivable sur $[0,5;10]$ telle que pour tout réel x, on a :

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + 6x\ln(x)$$

1. Démontrer que F est une primitive de f.
2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.

1) F est dérivable sur $[0,5;10]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0,5;10]$.

Pour tout $x \in [0,5;10]$:

$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + 6x\ln(x)$

$F'(x) = -\frac{1}{3} \times 3x^2 - 2 \times 2x + 9 + 6 \times 1 \times \ln(x) + 6x \times \frac{1}{x}$

$F'(x) = -x^2 - 4x + 9 + 6\ln(x) + 6$

$F'(x) = -x^2 - 4x + 15 + 6\ln(x) = f(x)$

On en déduit que F est une primitive de f sur $[0,5 ; 10]$

2) Soit G la primitive de f qui s'annule en 1
Par propriété du cours, il existe une constante k telle que pour tout $x \in [0,5 ; 10]$:
$G(x) = F(x) + k$
$G(1) = 0 \iff F(1) + k = 0 \iff \frac{20}{3} + k = 0 \iff k = -\frac{20}{3}$

Capacité 7 ***Calculer une intégrale (exo résolu 10 p. 173) et utiliser une symétrie pour calculer une aire (exo résolu 2 p. 169)***

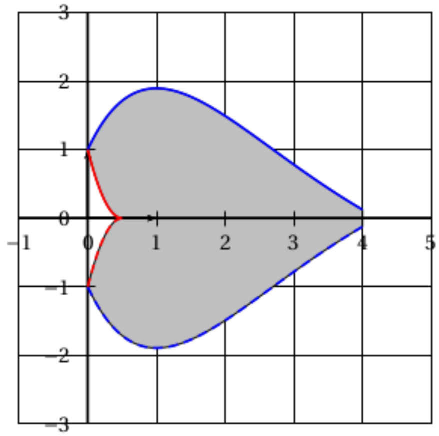
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par :

$$f(x) = (3,6x + 2,4)e^{-0,6x} - 1,4$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 0,5]$ par :

$$g(x) = 4x^2 - 4x + 1.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle $[0 ; 0,5]$.
On a tracé ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère d'origine O et, en pointillés, les courbes obtenues par symétrie de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ par rapport à l'axe des abscisses :



1. a. Démontrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par $F(x) = (-6x - 14)e^{-0,6x} - \frac{7}{5}x$ est une primitive de f.

   b. En déduire que $\int_0^4 f(x)\,dx = 5,6 + 38e^{-2,4}$.

2. Montrer que $\int_0^{0,5} g(x)\,dx = \frac{1}{6}$.

3. On considère le domaine plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, leurs courbes symétriques (en pointillés) ainsi que la droite d'équation $x = 4$.

   Ce domaine apparaît grisé sur la figure ci-dessus.

   Calculer une valeur approchée de l'aire, en unités d'aire, de ce domaine.

1) Une primitive de $g : x \mapsto 4x^2 - 4x + 1$ sur $[0;4]$ est la fonction

$$G : x \longmapsto 4\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x$$

$$G : x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x$$

1) $\int_0^{0,5} g(x)\,dx = G(0,5) - G(0)$

$$\int_0^{0,5} g(x)\,dx = \frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{0,5} g(x)\,dx = \frac{1}{6} - 2\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

2) a) Soit la fonction F définie sur $[0;4]$ par $F(x) = (-6x-14)e^{-0,6x} - \frac{7}{5}x$

F dérivable sur $[0;4]$ et pour tout $x \in [0;4]$, on a

$$F'(x) = -6e^{-0,6x} + (-6x-14)\times(-0,6)e^{-0,6x} - \frac{7}{5}$$

$$F'(x) = e^{-0,6x}(-6 + 3,6x + 8,4) - 1,4$$

$$F'(x) = (3,6x + 2,4)e^{-0,6x} - 1,4 = f(x)$$

F est donc une primitive de f.

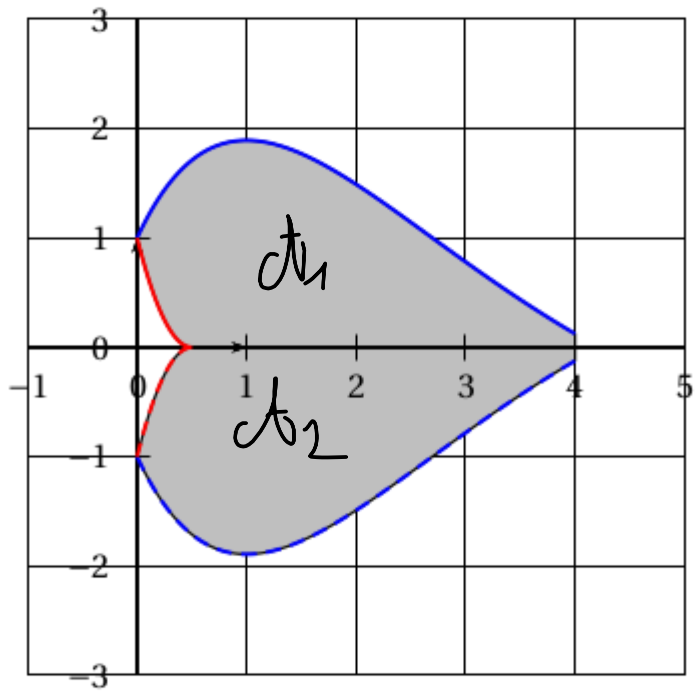
2) b)

$$\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0)$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = -38e^{-2,4} - 5,6 + 14$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = 8,4 - 38e^{-2,4}$$

3)



Par symétrie d'axe l'axe des abscisses :

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$

De plus $\mathcal{A}_1$ s'obtient en retranchant $\int_0^{0,5} g(x)\,dx$ à $\int_0^4 f(x)\,dx$

Donc on a :

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^4 f(x)\,dx - \int_0^{95} g(x)\,dx$$

$$\mathcal{A}_1 = 8,4 - 38e^{-2,4} - \frac{1}{6}$$

L'aire du domaine colorié est donc égale à :

$$\boxed{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 2 \times \left(8,4 - 38e^{-2,4} - \frac{1}{6}\right)}$$

soit environ 9,57 unités d'aires

Capacité 8 ***Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, voir exos résolus 10 et 11 p.173***

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^4 x^2 \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_4^1 x^2 \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_e^2 e^x + \frac{1}{x}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x$;
5. $\displaystyle\int_2^4 \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}\mathrm{d}x$;
6. $\displaystyle\int_e^{e^3} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+e^t}\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_2^e \frac{1}{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$

1) $$\int_1^4 x^2 dx = \Bigg[\underbrace{\frac{x^3}{3}}_{\text{primitive de } x^2}\Bigg]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3}$$

3) $$\int_e^2 e^x + \frac{1}{x} dx = \Big[e^x + \ln(x)\Big]_e^2$$

$$\int_e^2 e^x + \frac{1}{x} dx = e^2 - e + \ln(2) - \ln(e)$$
$$= e^2 - e + \ln(2) - 1$$

2) $$\int_4^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_4^1 = \frac{1}{3} - \frac{4^3}{3} = \frac{-63}{3}$$

On remarque que $\displaystyle\int_4^1 x^2 dx = -\int_1^4 x^2 dx$

4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \left[\ln(e^x+1)\right]_{-1}^{1}$

$= \ln(e+1) - \ln(e^{-1}+1)$

$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln\left(\frac{e+1}{e^{-1}+1}\right)$

5) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{1+x^3}\right]_{2}^{4}$

$= -\frac{1}{65} + \frac{1}{9}$

$\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}\,dx = \frac{56}{585}$

6) $\displaystyle\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \left[\ln(\ln(x))\right]_{e}^{e^3}$

$\displaystyle\int_{e}^{e^3} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln(\ln(e^3)) - \ln(\ln e)$

$= \ln(3) - \ln(1)$

$\displaystyle\int_{e}^{e^3} \frac{1/x}{\ln(x)}\,dx = \ln(3)$

7) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+e^t}\,dt = \int_0^x \frac{e^{-t}}{e^{-t}+1}\,dt$

$$\int_0^x \frac{1}{1+e^t}\,dt = \Big[-\ln(e^{-t}+1)\Big]_0^x$$

$$= \ln(2) - \ln(e^{-x}+1)$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+e^t}\,dt = \ln\left(\frac{2}{e^{-x}+1}\right)$$

8) $\displaystyle\int_2^e \frac{1}{x}\ln(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_2^e$

$$= \frac{1}{2}(\ln(e))^2 - \frac{1}{2}(\ln(2))^2$$

$$\int_2^e \frac{1}{x}\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}\times(1-\ln(2))(1+\ln(2))$$

$$\int_2^e \frac{1}{x}\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}\times\ln\left(\frac{e}{2}\right)\times\ln(2e)$$

Capacité 9 ***Application des propriétés de l'intégrale***

Soient f et g deux fonctions continues sur $[1\,;5]$, on donne :

$$I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=-3 \qquad J=\int_5^2 f(x)\mathrm{d}x=2 \qquad K=\int_1^5 g(x)\mathrm{d}x=12$$

Calculer $L=\displaystyle\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$, $M=\displaystyle\int_1^5 (f(x)+g(x))\mathrm{d}x$ puis $N=\displaystyle\int_1^5 (2f(x)-3g(x))\mathrm{d}x$

- $L=\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^5 f(x)\,dx$ d'après la relation de Chasles

Or $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx=-\int_5^2 f(x)\,dx=-J$

donc $L=I-J=-3-2=-5$

- $M=\displaystyle\int_1^5 f(x)+g(x)\,dx=\int_1^5 f(x)\,dx+\int_1^5 g(x)\,dx$ par linéarité de l'intégrale

donc $M=L+K=-5+12=7$

- $N=\displaystyle\int_1^5 (2f(x)-3g(x))\,dx=2\int_1^5 f(x)\,dx-3\int_1^5 g(x)\,dx$ par linéarité de l'intégrale

donc $N=2\times L-3\times K=2\times(-5)-3\times 12=-46$

Capacité 10 ***Encadrer une intégrale, voir exo résolu 18 p.175***

1. Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, on a :

$$0 \leqslant x e^{-x} \leqslant x e^{-x^2}$$

2. En déduire que :

$$0 \leqslant \int_0^1 x e^{-x}\, dx \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

1) Pour tout réel $x \in [0;1]$, on a :

$$0 \leq x^2 \leq x \leq 1$$

donc $-1 \leq -x \leq -x^2 \leq 0$

donc $e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^{-x^2} \leq 1$ par croissance de l'exponen-tielle

Or $x \in [0;1]$, donc :

$$0 \leq x e^{-1} \leq x e^{-x} \leq x e^{-x^2} \leq x \leq 1$$

2) Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$0 \leq \int_0^1 x e^{-x} dx \leq \int_0^1 x e^{-x^2} dx$$

Une primitive de $x e^{-x^2}$ est $-\frac{1}{2} e^{-x^2}$

donc $\int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(-e^{-1}+1)$

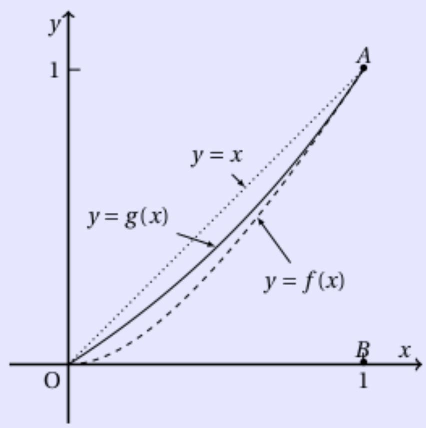
On en déduit que :

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 x e^{-x} \, dx \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$$

Thème 1 ***Courbe de Lorenz et coefficient de Gini, calculs d'aires, répartition des richesses et inégalités***

On a représenté ci-dessous dans un repère orthonormal du plan et sur l'intervalle $[0; 1]$, la droite d'équation $y = x$ et les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = 2x + \frac{2}{x+1} - 2$ et $g(x) = 0,5e^x - (0,5e - 1,5)x - 0,5$.

On a placé aussi les points $A(1; 1)$ et $B(1; 0)$.



Les courbes des fonctions f et g illustrent la répartition des surfaces agricoles de deux pays F et G en fonction de la taille des exploitations : on parle de *courbes de Lorenz*.

On admet que les fonctions f et g sont positives et croissantes sur l'intervalle $[0; 1]$ et que pour tout $x \in [0; 1]$ on a $f(x) \leqslant x$ et $g(x) \leqslant x$.

Par exemple, on a $g(0,4) \approx 0,30$ ce qui signifie que dans le pays G, 40 % des exploitations les plus petites représentent environ 30 % de la superficie des exploitations du pays.

De plus on a $f(0) = g(0) = 0$ et $f(1) = g(1) = 1$.

On appelle *coefficient de Gini* le quotient de l'aire du domaine compris entre la courbe de Lorenz et la droite Δ d'équation $y = x$ par l'aire du triangle OAB.

1. Justifier que le *coefficient de Gini* du pays F est égal à $2 \times \int_0^1 2 - x - \frac{2}{x+1} \, dx$.
2. En déduire la valeur exacte du *coefficient de Gini* du pays F.
3. Justifier que la valeur exacte du *coefficient de Gini* du pays G est $\frac{3-e}{2}$.
4. Comment la comparaison des *coefficients de Gini* permet-elle de déterminer le pays où la répartition des surfaces agricoles est la plus égalitaire ?

1) Le coefficient de Gini du pays F est égal à :

$$Gini(F) \frac{\int_0^1 x - f(x)\,dx}{1/2} = 2 \times \int_0^1 x - f(x)\,dx$$

$$Gini(F) = 2 \times \int_0^1 2 - x - \frac{2}{x+1}\,dx$$

$$= 2 \times \left[2x - \frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x+1)\right]_0^1$$

$$Gini(F) = 2 \times \left[\frac{3}{2} - 2\ln(2)\right] = 3 - 4\ln(2)$$

3) $$Gini(G) = \frac{\int_0^1 x - g(x)\,dx}{1/2}$$

$$= 2 \times \int_0^1 -0{,}5e^x + 0{,}5(e-1)x + 0{,}5\,dx$$

$$= 2 \times \left[-0{,}5e^x + 0{,}25(e-1)x^2 + 0{,}5x\right]_0^1$$

$$= 2 \times \left(-0{,}5e + 0{,}25 + 0{,}25e + 0{,}5\right)$$

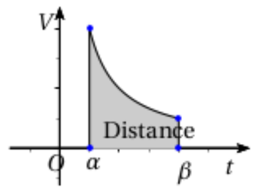
$$Gini(G) = 2 \times (0{,}75 - 0{,}25e) = 1{,}5 - 0{,}5e$$

4) Gini (G) > Gini (F)
donc la répartition des terres agricoles dans le pays G est + égalitaire.

Capacité 11 ***Calculer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction, voir capacité 9 p.337***

Pour $t > 0$ la vitesse d'un mobile est $v(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}$ (en $\mathrm{m.s^{-1}}$).

1. Calculer la distance parcourue entre les instants $t = 1$ et $t = e^2$ (en s).
2. Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t = 1$ et $t = e^2$.



1) La distance parcourue entre les instants $t = 1$ et $t = e^2$ est :

$$\int_1^{e^2} v(t)\,dt = \int_1^{e^2} \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{t} + \ln(t)\right]_1^{e^2}$$

$$= -\frac{1}{e^2} + \ln(e^2) + 1$$

$$\int_1^{e^2} v(t)\,dt = -\frac{1}{e^2} + 2 + 1 = 3 - \frac{1}{e^2}$$

2) La vitesse moyenne du mobile entre les instants $t = 1$ et $t = e^2$ est :

$$\frac{1}{e^2-1}\int_1^{e^2} v(t)\,dt = \frac{1}{e^2-1} \times \left(3 - \frac{1}{e^2}\right)$$

Capacité 12 ***Calculer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction, voir exo 79 p.182***

1. On considère que la croissance d'un plant de maïs est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 250]$ par

$$f(t) = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}$$

Au bout de t jours avec t dans l'intervalle $[0; 250]$, la hauteur du plant est de $f(t)$ mètres.

   a. Déterminer la valeur exacte de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; 250]$.

   b. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

2. Une entreprise acquiert une nouvelle machine qui permet d'obtenir un coût total de fabrication hebdomadaire modélisé par la fonction g définie sur $[0; 15]$ par

$$g(x) = e^{0,5x-1} - x^2 + 20x + 20,$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $g(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

Le coût marginal obtenu avec cette nouvelle machine est donné par la fonction g'.

Déterminer la valeur moyenne, arrondie à l'euro, du coût marginal lorsqu'on fabrique entre 5 centaines et 8 centaines de lots.

1) ~~Va~~ valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; 250]$:

$$\mu = \frac{1}{250}\int_0^{250} f(t)\,dt = \frac{1}{250}\int_0^{250} \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}\,dt$$

$$\mu = \frac{1}{250}\int_0^{250} f(t)\,dt = \frac{1}{250}\left[\frac{2}{0,04}\ln\left(e^{0,04t}+19\right)\right]_0^{250}$$

$$\mu = \frac{1}{250}\left(50 \ln(e^{10}+19) - 50\ln(20)\right)$$

$$\mu = \frac{50}{250} \times \ln\left(\frac{e^{10}+19}{20}\right) = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{e^{10}+19}{20}\right)$$

b) $\mu \simeq 1{,}4$ en mètres

C'est la hauteur moyenne du plan de maïs pendant sa phase de croissance.

2) Valeur moyenne du coût marginal lorsque on fabrique entre 5 et 8 centaines de lots :

$$\mu = \frac{1}{8-5}\int_5^8 g'(x)\,dx = \frac{1}{3} \times \left[g(x)\right]_5^8$$

$$\mu = \frac{g(8)-g(5)}{3} \simeq 12{,}2$$ centaines d'euros