Histoire 1

Dans les premières années du XVII$^{\text{ième}}$ siècle, John Neper (1550-1617) invente le logarithme (du grec *logos* logique et *arithmos* nombre) en faisant correspondre les termes d'une suite géométrique à ceux d'une suite arithmétique : les multiplications sont ainsi transformées en addition. Il construit avec Henry Briggs (1561-1630) des tables de logarithme qui facilitent les multiplications de grands nombres, utiles en astronomie. Pour multiplier deux nombres A et B, on additionne leurs logarithmes log(A) et log(B) et on lit dans une table *l'antélogarithme* (en fait l'exponentielle) de cette somme : il s'agit du produit A×B. Cette méthode est utilisée dans les les règles à calculs des lycéens jusque dans les années 1970 avant la démocratisation des calculatrices électroniques.

1 Fonction logarithme népérien

1.1 Définition

Théorème-Définition 1

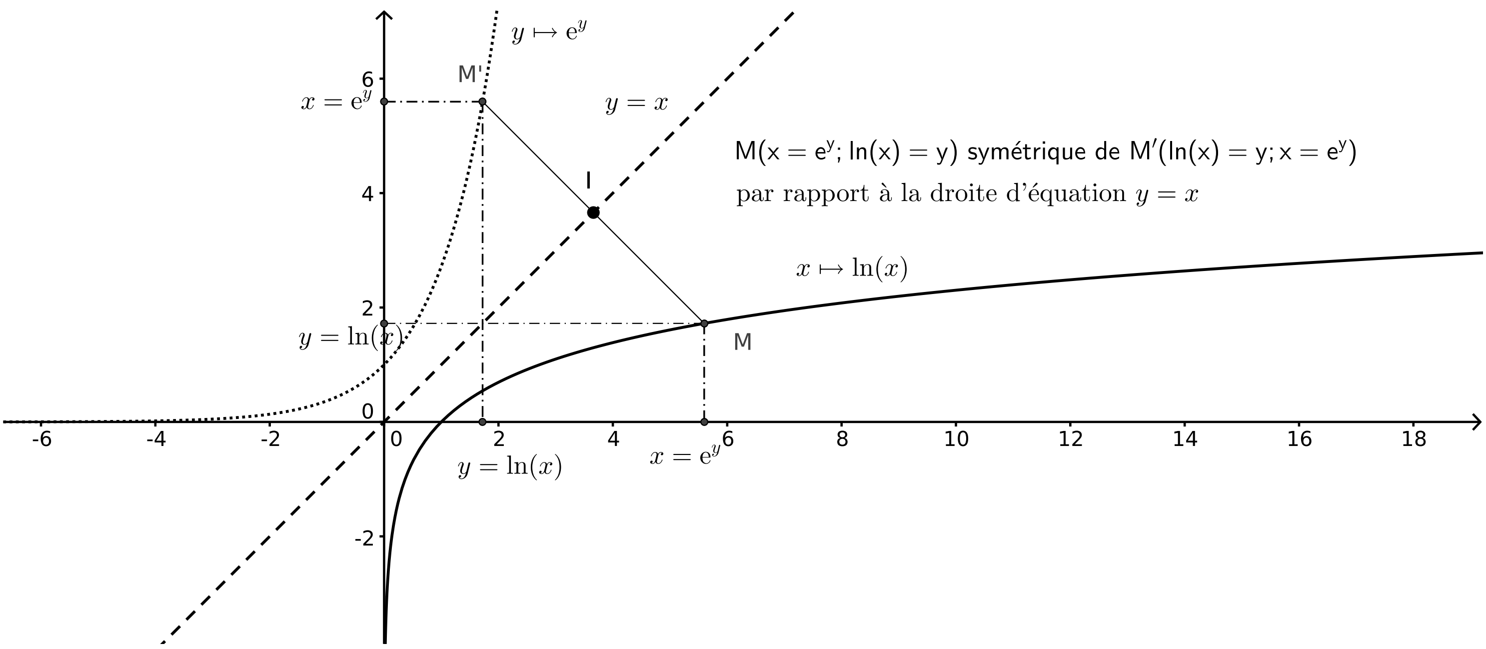
Pour tout réel $x > 0$ il existe un unique réel y tel que $\mathrm{e}^y = x$, ce réel est le logarithme népérien de x noté $y = \ln x$.
On définit ainsi sur $]0\,;+\infty[$ la fonction logarithme népérien $\ln : x \mapsto \ln x$, c'est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle .

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \ln x = y \iff x = \mathrm{e}^y$$

⚠ ne pas confondre les touches $\boxed{\text{Ln}}$ et $\boxed{\text{Log}}$ (qui correspond au *logarithme décimal*, pour tout $x > 0$, $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$).

Démonstration

La fonction $\exp : y \mapsto \mathrm{e}^y$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement 0 et $+\infty$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel strictement positif x, l'équation $\mathrm{e}^y = x$ a une unique solution que l'on note : $y = \ln x$ ou $y = \ln(x)$.



Capacité 1 ***Une application du logarithme : les échelles logarithmiques, voir exo 120 p.106***

La magnitude d'un séisme d'amplitude maximale A est mesurée *l'échelle de Richter* par $M = \dfrac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{\ln(10)}$ où A_0 est une amplitude de référence. Cette formule s'écrit souvent $M = \log\left(\dfrac{A}{A_0}\right)$ où $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ est la fonction logarithme décimal (touche Log de la calculatrice).

1. Déterminer avec la calculatrice la magnitude sur l'échelle de Richter des séismes suivants :

- **a.** Un séisme d'amplitude A_0.
- **b.** Un séisme d'amplitude $10A_0$.
- **c.** Un séisme d'amplitude $20A_0$.
- **d.** Un séisme d'amplitude $10^n A_0$ avec n entier naturel. Quelle conjecture peut-on formuler?
- **e.** le séisme de Barcelonnette (France 2014) d'amplitude $A = 2 \times 10^5 A_0$.

2. Exprimer en fonction de A_0 l'amplitude maximale du séisme d'Amatrice (Italie 2016) dont la magnitude était de 6,2 sur l'échelle de Richter.

3. *L'échelle de Richter* est une **échelle logarithmique**, la valeur représentée sur l'échelle est le logarithme (népérien ou décimal) de la grandeur mesurée. Quel est l'intérêt d'une échelle logarithmique par rapport à une échelle linéaire?

Corollaire ln ***fonction réciproque de*** exp

1. Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
3. En particulier, on a $\ln(e) = 1$ et $\ln(1) = 0$.

4. Dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration

On applique la définition du logarithme fonction réciproque de la fonction exponentielle :

. . . .

1. Pour tout réel x avec x argument de la fonction exponentielle :

$$e^x = e^x \underset{\text{définition de ln}}{\iff} \ln(e^x) = x$$

2. ln définie sur $]0\,;+\infty[$ d'où la contrainte sur x.

Pour tout réel $x > 0$ avec x argument de la fonction ln :

$$x \underset{\text{définition de ln}}{=} e^{\ln(x)}$$

3. On applique la définition de ln dans deux cas particuliers :

$$e = e^1 \underset{\text{définition de ln}}{\iff} \ln(e) = 1$$
$$1 = e^0 \underset{\text{définition de ln}}{\iff} \ln(1) = 0$$

Capacité 2 *Utiliser la définition de la fonction logarithme*

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto \ln(1-3x)$

b. $g : x \mapsto \ln(x^2)$

2. Compléter les pointillés :

a. $e^{\ln(3)} = \cdots$

b. $\ln(e^0) = \cdots$

c. $\ln(e^{-7}) = \cdots$

d. $\ln(e^2) + \ln(e^3) = \cdots$

e. $\ln(e^2 \times e^3) = \cdots$

f. $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \cdots$

1.2 Dérivée et sens de variation

Propriété 1

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, on a :

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

Démonstration *Au programme, voir manuel p.194*

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, déterminons une expression de sa fonction dérivée.
Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x)=\ln(x)$.

- On décompose la fonction composée $g=\mathrm{e}^u$.

$$\begin{tikzcd} x>0 \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "g=\mathrm{e}^u"] & u(x)=\ln(x) \arrow[r] & \mathrm{e}^{u(x)} \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{X} \xrightarrow{v} \mathrm{e}^X$$

- u est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc d'après un théorème de dérivation de fonction composée, on a :

$$g'(x)=u'(x)\times \mathrm{e}^{u(x)}$$

donc

$$g'(x)=u'(x)\times \mathrm{e}^{u(x)}=\ln'(x)\mathrm{e}^{\ln(x)}=\dots$$

De plus $g(x)=\mathrm{e}^{\ln(x)}=x$ donc $g'(x)=1$, on en déduit que

$$\ln'(x)=\dots$$

Corollaire

1. La fonction ln est **strictement croissante** sur $]0\,;+\infty[$.

2. Pour tous réels a et b strictement positifs :

- $\ln(a)=\ln(b) \Longleftrightarrow a=b$
- $\ln(a)>\ln(b) \Longleftrightarrow a>b$

3. Pour tout réel x strictement positif et tout réel k :

- $\ln(x)>k \Longleftrightarrow \ln(x)>\ln\left(e^k\right) \Longleftrightarrow x>e^k$
- $\ln(x)<k \Longleftrightarrow \ln(x)<\ln\left(e^k\right) \Longleftrightarrow 0<x<e^k$

4. La fonction ln est négative sur $]0\,;1[$ et positive sur $]1\,;+\infty[$:

- $\ln(x)>0 \Longleftrightarrow x>1$
- $\ln(x)<0 \Longleftrightarrow 0<x<1$

Démonstration

1. Pour tout réel $x > 0$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ donc $\ln'(x) > 0$ donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. La fonction ln étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, pour tous réels a et b strictement positifs on a :

   - $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$
   - $\ln(a) > \ln(b) \iff a > b$

3. Pour tout réel k, on a $k = \ln\left(\mathrm{e}^k\right)$ donc on peut appliquer la propriété précédente avec $a = x > 0$ et $b = \mathrm{e}^k$:
$$\ln(x) > \ln\left(\mathrm{e}^k\right) \iff x > \mathrm{e}^k$$

4. D'une part, la fonction ln étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

   D'autre part $\mathrm{e}^0 = 1 \iff \ln(1) = 0$.

   On en déduit le tableau de variations de la fonction ln :

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	‖	0 ↗	↗

   On en déduit le tableau de signes de la fonction ln :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Capacité 3 *Utiliser les propriétés de la fonction logarithme*

Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto x\ln(x) - x$ définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

1.3 Résolution d'équations et d'inéquations

Méthode

- Pour tout réel k, et tout réel x tel que $u(x) > 0$:
  $\ln(u(x)) = k \iff u(x) = \mathrm{e}^k$ et $\ln(u(x)) > k \iff u(x) > \mathrm{e}^k$ et $\ln(u(x)) < k \iff 0 < u(x) < \mathrm{e}^k$

- Résolution de $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ ou $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$:

  - On détermine l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels x tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$
  - On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $u(x) = v(x)$ ou l'inéquation $u(x) < v(x)$
  - On ne garde que les solutions qui sont dans $\mathscr{D}$.

- Résolution de $a\,(\ln(x))^2 + b\ln(x) + c = 0$:
  On pose X=$\ln(x)$ c'est-à-dire $x = \mathrm{e}^{\mathrm{X}}$ puis on résout l'équation d'inconnue X : $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c = 0$.

- Résolution de $a\left(\mathrm{e}^x\right)^2 + b\mathrm{e}^x + c = 0$:
  On pose X=e^x c'est-à-dire $x = \ln X$ puis on résout l'équation d'inconnue X : $aX^2 + bX + c = 0$.

Capacité 4 ***Résoudre des équations ou inéquations avec la fonction logarithme, voir exos résolus 5 et 6 p.91***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations :

1. $\mathrm{e}^{2x-4} = \mathrm{e}^{-x}$

2. $\mathrm{e}^{2x-4} > \mathrm{e}^{-x}$

3. $\ln(2x-4) > -5$

4. $\ln(2x-4) < 0$

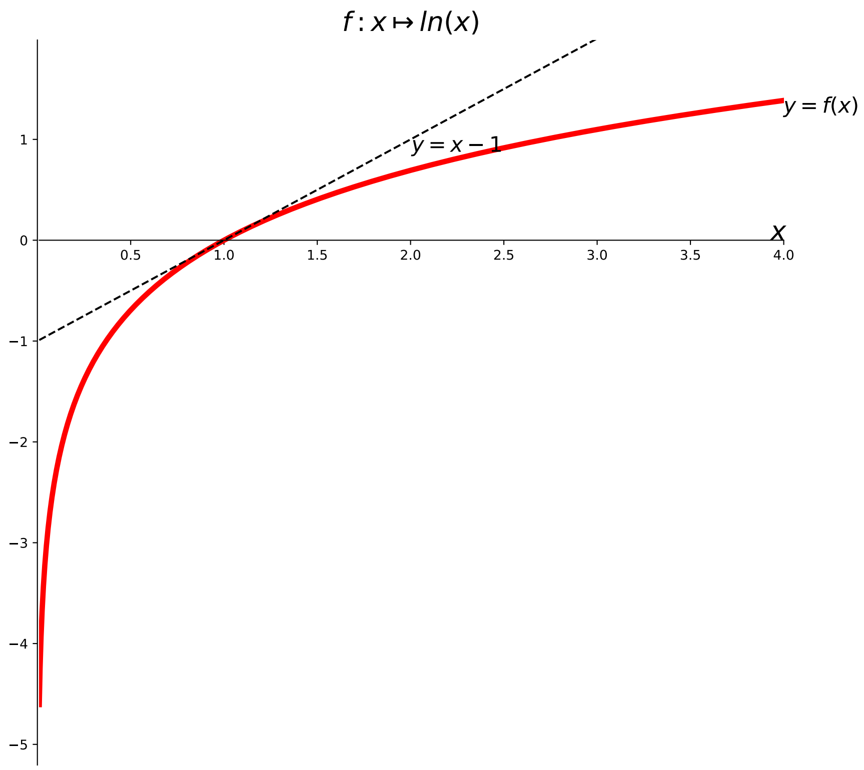
5. $\ln(2x) \geqslant \ln(x^2-1)$

6. $(\ln x)^2 - \ln x = 6$

7. $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x = 6$

8. $(\ln x)^2 - \ln x < 6$

1.4 Propriétés de convexité



Propriété 2

1. La fonction ln est **concave** sur $]0\,;+\infty[$.

On en déduit que dans un repère du plan, la courbe de la fonction ln est en dessous de chacune de ses tangentes.

2. Pour tout réel $x > 0$, on a $\ln(x) \leqslant x - 1$.

Démonstration

1. La fonction ln est dérivable et pour tout réel $x > 0$, on a :

   $\ln'(x) = \ldots\ldots$

   On en déduit que la fonction $\ln'$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ donc ln deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, on a :

   $\ln''(x) = \ldots\ldots$

   On a .... donc la fonction ln est concave.

2. Déterminons une équation de la tangente à la courbe de la fonction ln au point d'abscisse 1 :

   ....

   ....

   ....

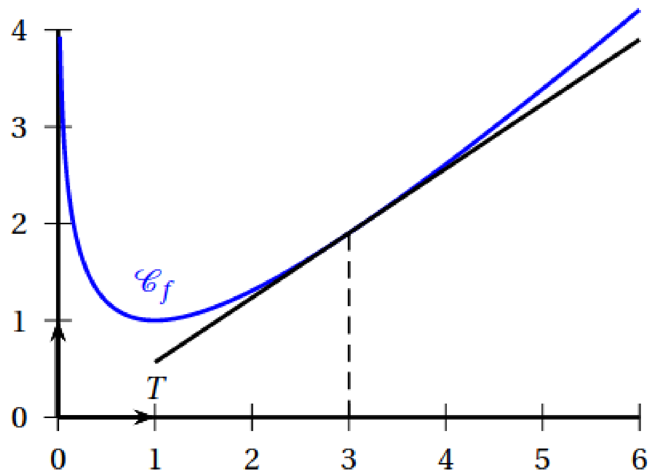
   Par concavité de la fonction ln on en déduit que :

   ....

   ....

Capacité 5 *Étudier la convexité d'une fonction*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = 3$.



1. Cette tangente T à $\mathscr{C}_f$ passe- t -elle par l'origine du repère?

2. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2 Propriétés algébriques

2.1 Équation fonctionnelle

Propriété 3 ***Équation fonctionnelle***

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}$$

On dit que la fonction ln vérifie **l'équation fonctionnelle** $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Démonstration ***Voir manuel p. 92***

On utilise le fait que pour tous réels x et y :

$$e^x = e^y \iff x = y \tag{1}$$

et que pour tous réels z et t :

$$e^{z+t} = e^z \times e^t \tag{2}$$

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$$

Donc d'après la propriété (1) :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Algorithmique 1 ***Application de l'équation fonctionnelle du logarithme aux suites géométriques***

On estime que la population d'oiseaux d'une réserve diminue de 5% par an. Cette population est estimée en 2020 à 60000 individus.
On note u_n la population d'oiseaux en $2020 + n$.

1. **a.** Justifier que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

   b. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que `seuil(k)` détermine le nombre d'années minimum au bout duquel on aura $u_n < k$.

```
def seuil(k):
    u  = 60000
    n = 0
    while ............. :
        u  = ......
        n  = ......
    return n
```

c. Avec la calculatrice, déterminer la valeur de `seuil(30000)`.

2. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

a. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la nature de (v_n).

b. Retrouver la valeur de `seuil(30000)` en résolvant une inéquation.

Thème 1 ***Modèle défini par une fonction d'une variable, loi de Benford***

Dans cet exercice, on considère le premier chiffre des entiers naturels non nuls, en écriture décimale. Par exemple, le premier chiffre de 2 017 est 2 et le premier chiffre de 95 est 9.
Dans certaines circonstances, le premier chiffre d'un nombre aléatoire non nul peut être modélisé par une variable aléatoire X telle que pour tout entier c compris entre 1 et 9,

$$P(X = c) = \frac{\ln(c+1) - \ln(c)}{\ln(10)}.$$

Cette loi est appelée loi de Benford.

1. Que vaut $P(X = 1)$?

2. On souhaite examiner si la loi de Benford est un modèle valide dans deux cas particuliers.

a. Premier cas

Un fichier statistique de l'INSEE indique la population des communes en France au 1er janvier 2016 (champ : France métropolitaine et départements d'outre-mer de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de la Réunion).

À partir de ce fichier, on constate qu'il y a 36 677 communes habitées. Parmi elles, il y a 11 094 communes dont la population est un nombre qui commence par le chiffre 1.

Cette observation vous semble-t-elle compatible avec l'affirmation : « le premier chiffre de la population des communes en France au 1 er janvier 2016 suit la loi de Benford » ?

b. Deuxième cas

Pour chaque candidat au baccalauréat de la session 2017, on considère sa taille en centimètres.

On désigne par X la variable aléatoire égale au premier chiffre de la taille en centimètres d'un candidat pris au hasard.

La loi de Benford vous semble-t-elle une loi adaptée pour X ?

2.2 Corollaires de l'équation fonctionnelle

Corollaire ***admis***

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, pour tout entier relatif n :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$
$$\ln\left(a^n\right) = n\ln(a) \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Capacité 6 ***Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme pour simplifier une expression, voir exo résolu 11 p.93***

Exprimer en fonction de $\ln(3)$, $\ln(5)$ ou d'un entier :

1. $\ln(15)$
2. $\ln(75)$
3. $\ln(0,6)$
4. $\ln\left(\mathrm{e}^{\ln(5/3)}\mathrm{e}^{\ln(3)}\right)$
5. $\ln(\sqrt{15})$
6. $\ln(3^4)\ln(5\mathrm{e})$

Capacité 7 ***Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme pour résoudre une équation ou une inéquation, voir exo résolu 12 p.93***

1. Résoudre les équations ou inéquations suivantes en déterminant d'abord l'ensemble de résolution :

   a. $\ln(x+3)+\ln(x-2)=\ln 6$

   b. $\ln((x+3)(x-2)) \leqslant 2\ln\left(\sqrt{6}\right)$

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

   a. $0,8^n \leqslant 10^{-4}$ avec $n \in \mathbb{N}$

   b. $1,02^n > 10^{2019}$

3. *Un problème de Leonhard Euler :*

   Si le nombre des hommes est doublé tous les 100 ans, quel est l'accroissement annuel ?

3 Limites et tableau de variations

Propriété 4 ***admise***

☞ Limites aux bornes de l'intervalle de définition :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty}$$

☞ On a $\boxed{\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1}$ qui peut s'écrire $\boxed{\lim_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1}$

On en déduit une approximation de $\ln(x)$ quand x est proche de 1 : $\boxed{\ln(x) \underset{x\to 1}{\approx} x-1}$.

Propriété 5 ***Tableau de variation complet***

1. Des propriétés sur le sens de variation et les limites de la fonction ln, on peut déduire son tableau de variations complet :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote à la courbe de la fonction ln.

Capacité 8 ***Utiliser les propriétés de la fonction logarithme***

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;25]$ par

$$f(x) = \frac{x+2-\ln(x)}{x}.$$

   a. On admet que f est dérivable sur $[1\,;25]$.
   Démontrer que pour tout réel x appartient à l'intervalle $[1\,;25]$,

$$f'(x) = \frac{-3+\ln(x)}{x^2}.$$

   b. Résoudre dans $[1\,;25]$ l'inéquation $-3+\ln(x) > 0$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[1\,;25]$.

   d. Démontrer que dans l'intervalle $[1\,;25]$, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une seule solution. On notera α cette solution.

   e. Déterminer un encadrement d'amplitude $0{,}01$ de α à l'aide de la calculatrice.

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéoprojecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.

   On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.

   En utilisant les résultats obtenus à la question **1.** :

   a. Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal.
   Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

   b. Déterminer le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à $1{,}50$ euro.

   c. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.

4 Compléments sur la fonction ln

4.1 Fonctions composées $x \mapsto \ln(u(x))$

Propriété 6 ***admise***

Soit $\boldsymbol{u}$ une fonction définie sur un intervalle I qui est dérivable et strictement positive sur I.
La fonction composée définie sur I par $\boldsymbol{g(x) = \ln(u(x))}$ est dérivable sur I et on a :

$$\text{pour tout } \boldsymbol{x} \in \mathrm{I} \text{ on a } \boldsymbol{g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

On en déduit que les fonctions $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{g = \ln(u)}$ suivent les mêmes variations sur l'intervalle I.

Capacité 9 ***Résoudre un problème en utilisant les propriétés de la fonction logarithme***

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ et déterminer ses limites aux bornes de son intervalle de définition.

2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

4.2 Thème du programme : approche historique de la fonction logarithme

Thème 2 ***Calcul de logarithme avec l'algorithme de Briggs, voir exo 105 p.103***

1. **a.** Déterminer le nombre dérivé en 1 de la fonction ln.

   b. En déduire que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$. Pour un réel x proche de 1, on peut donc écrire $\ln(x) \approx x-1$.
   Dans cet exercice, on choisit d'utiliser cette approximation pour x vérifiant $|x-1| < 0{,}001$.

2. On admet qu'on peut définir une suite (u_n) par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. De plus on admet que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n > 0$.

   a. Démontrer les égalités $\ln(u_1) = \frac{1}{2}\ln(2)$ et $\ln(u_2) = \frac{1}{2^2}\ln(2)$.

   b. Exprimer $\ln(u_{n+1})$ en fonction de $\ln(u_n)$, pour tout entier $n \geqslant 0$.

   c. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $v_n = \ln(u_n)$.
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\ln(u_n) = \dfrac{1}{2^n}\ln(2)$.

e. Donner une forme explicite de u_n pour tout entier $n \geqslant 0$.
En déduire que (u_n) converge vers 1.

f. Déduire de la question **1. b** que pour tout entier naturel n tel que $\left|u_n - 1\right| < 0{,}001$, on a :

$$\ln(2) \approx 2^n(u_n - 1)$$

3. Compléter la fonction `briggs()` ci-dessous pour qu'elle renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$.

```python
from math import sqrt

def briggs():
    u = 2
    n = 0
    while abs(u - 1) ..... 0.001:
        u = ......
        n = n + 1
    return .......
```

La version présentée dans cet exercice est une version simplifiée de l'algorithme historique. Ci-dessous un extrait de *l'Introduction à l'analyse infinitésimale* où Leonhard Euler 1707-1783 explique la méthode utilisée par Briggs pour calculer une valeur approchée du logarithme décimal de 5. Le **logarithme décimal** d'un nombre strictement positif x noté $\log(x)$ est proportionnel au logarithme népérien $\ln(x)$ par la relation $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Soit la baſe logarithmique $a = 10$, qui eſt celle des tables ordinaires, & propoſons-nous de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre eſt renfermé entre les limites 1 & 10, dont les logarithmes ſont 0 & 1, on procédera de la maniere ſuivante à l'extraction des racines, & on continuera les opérations juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à des limites, qui ne different plus du nombre propoſé 5.

$A = 1{,}000000$;	$lA = 0{,}0000000$	ſoit
$B = 10{,}000000$;	$lB = 1{,}0000000$;	$C = \sqrt{AB}$
$C = 3{,}162277$;	$lC = 0{,}5000000$;	$D = \sqrt{BC}$
$D = 5{,}623413$;	$lD = 0{,}7500000$;	$E = \sqrt{CD}$
$E = 4{,}216964$;	$lE = 0{,}6250000$;	$F = \sqrt{DE}$
$F = 4{,}869674$;	$lF = 0{,}6875000$;	$G = \sqrt{DF}$
$G = 5{,}232991$;	$lG = 0{,}7187500$;	$H = \sqrt{FG}$
$H = 5{,}048065$;	$lH = 0{,}7031250$;	$I = \sqrt{FH}$
$I = 4{,}958069$;	$lI = 0{,}6953125$;	$K = \sqrt{HI}$
$K = 5{,}002865$;	$lK = 0{,}6992187$;	$L = \sqrt{IK}$
$L = 4{,}980416$;	$lL = 0{,}6972656$;	$M = \sqrt{KL}$
$M = 4{,}991627$;	$lM = 0{,}6982421$;	$N = \sqrt{KM}$
$N = 4{,}997242$;	$lN = 0{,}6987304$;	$O = \sqrt{KN}$
$O = 5{,}000052$;	$lO = 0{,}6989745$;	$P = \sqrt{NO}$
$P = 4{,}998647$;	$lP = 0{,}6988525$;	$Q = \sqrt{OP}$
$Q = 4{,}999350$;	$lQ = 0{,}6989135$;	$R = \sqrt{OQ}$
$R = 4{,}999701$;	$lR = 0{,}6989440$;	$S = \sqrt{OR}$
$S = 4{,}999876$;	$lS = 0{,}6989592$;	$T = \sqrt{OS}$
$T = 4{,}999963$;	$lT = 0{,}6989668$;	$V = \sqrt{OT}$
$V = 5{,}000008$;	$lV = 0{,}6989707$;	$W = \sqrt{TV}$
$W = 4{,}999984$;	$lW = 0{,}6989687$;	$X = \sqrt{WV}$
$X = 4{,}999997$;	$lX = 0{,}6989697$;	$Y = \sqrt{VX}$
$Y = 5{,}000003$;	$lY = 0{,}6989702$;	$Z = \sqrt{XY}$
$Z = 5{,}000000$;	$lZ = 0{,}6989700$;	

Ainſi, en prenant des moyennes proportionnelles, on eſt parvenu à trouver $Z = 5{,}000000$, à quoi répond le logarithme cherché $0{,}698970$, en ſuppoſant la baſe logarithmique $= 10$. Par conſéquent $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$ à-peu-près. C'eſt de cette maniere que Briggs & Ulacq ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives pour les trouver.

Table des matières