Limites de suites et de fonctions en l'infini

Maths Complémentaires

Frédéric Junier [1]

Lycée du Parc, Lyon

1. https://frederic-junier.org/

Plan

Définition d'une fonction composée

Limite d'une fonction composée

Enchaînement de fonction Partie 1/2

Fonction $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$

Décomposons le calcul de l'image de -7 par la fonction g :

Enchaînement de fonction Partie 1/2

Fonction $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$

Décomposons le calcul de l'image de -7 par la fonction g :

$$\overbrace{-7 \overset{u}{\longmapsto} 2-(-7)=9 \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{9}=3}^{\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad g \qquad\qquad\qquad}}$$

L'image de -7 s'obtient par enchaînement de deux fonctions :

Enchaînement de fonction Partie 1/2

Fonction $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$

Décomposons le calcul de l'image de -7 par la fonction g :

$$\overset{g}{\xrightarrow{\hspace{8cm}}}$$
$$-7 \overset{u}{\longmapsto} 2-(-7) = 9 \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{9} = 3$$

L'image de -7 s'obtient par enchaînement de deux fonctions :

- On calcule d'abord $u(-7) = 2-(-7) = 9$ image de -7 par la fonction $u : x \mapsto 2-x$.

Enchaînement de fonction Partie 1/2

Fonction $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$

Décomposons le calcul de l'image de -7 par la fonction g :

$$\overbrace{-7 \xmapsto{u} 2-(-7) = 9 \xmapsto{f} \sqrt{9} = 3}^{\xrightarrow{\quad g \quad}}$$

L'image de -7 s'obtient par enchaînement de deux fonctions :

- On calcule d'abord $u(-7) = 2-(-7) = 9$ image de -7 par la fonction $u : x \mapsto 2-x$.
- Ensuite on calcule $f(9) = 2-(-7)$ image de $u(-7)$ par la fonction $f : y \mapsto \sqrt{y}$.

Enchaînement de fonction Partie 2/2

Fonction $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$

Et si on veut déterminer l'image de l'image de 3 par la fonction g ?

Enchaînement de fonction Partie 2/2

Fonction $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$

Et si on veut déterminer l'image de l'image de 3 par la fonction g ?

- $3 \overset{u}{\longmapsto} 2-3=-1$

Enchaînement de fonction Partie 2/2

Fonction $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$

Et si on veut déterminer l'image de l'image de 3 par la fonction g ?

- $3 \overset{u}{\longmapsto} 2-3=-1$
- On ne peut pas déterminer l'image de -1, qui est négatif, par $f : y \mapsto \sqrt{y}$

Enchaînement de fonction Partie 2/2

Fonction $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$

Et si on veut déterminer l'image de l'image de 3 par la fonction g ?

- $3 \xmapsto{u} 2-3=-1$
- On ne peut pas déterminer l'image de -1, qui est négatif, par $f : y \mapsto \sqrt{y}$

L'image de 3 par la fonction g n'est pas définie car l'image de 3 par la première fonction de l'enchaînement n'appartient pas à l'intervalle de définition de la deuxième fonction f de l'enchaînement.

Décomposer une fonction Partie 1/2

Fonction $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$

$g(x)$, s'il est défini, s'obtient par l'enchaînement de deux fonctions :

- on part de x auquel on associe $2-x$ par la fonction $u : x \mapsto 2-x$.
- ensuite à $u(x) = 2-x$ on associe $\sqrt{u(x)} = \sqrt{2-x}$ par la fonction $f : y \mapsto \sqrt{y}$ où $2-x$ est substitué à la variable y.

On dit que g est la **composée** de la fonction u par la fonction f, et on a $\boxed{g(x) = f(u(x))}$.

On note $\boxed{g = f \circ u}$ où $\circ$ est l'opérateur de **composition**.

$$\overset{g}{\xrightarrow{\hspace{6cm}}}$$
$$x \overset{u}{\longmapsto} 2-x \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{2-x}$$

Décomposer une fonction Partie 2/2

Fonction : $h : x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$

Si $h(x)$ est défini, décomposons le calcul de $h(x)$:

Décomposer une fonction Partie 2/2

Fonction : $h : x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$

Si $h(x)$ est défini, décomposons le calcul de $h(x)$:

- on part de x auquel on associe $1 - \dfrac{1}{x}$ par la fonction $u : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x}$.

Décomposer une fonction Partie 2/2

Fonction : $h : x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$

Si $h(x)$ est défini, décomposons le calcul de $h(x)$:

- on part de x auquel on associe $1 - \dfrac{1}{x}$ par la fonction $u : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x}$.
- ensuite à $u(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ on associe $f(u(x)) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$ par la fonction $f : y \mapsto y^7$ où $1 - \dfrac{1}{x}$ est substitué à la variable y.

Décomposer une fonction Partie 2/2

Fonction : $h : x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right)^7$

Si $h(x)$ est défini, décomposons le calcul de $h(x)$:

- on part de x auquel on associe $1 - \frac{1}{x}$ par la fonction $u : x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$.
- ensuite à $u(x) = 1 - \frac{1}{x}$ on associe $f(u(x)) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^7$ par la fonction $f : y \mapsto y^7$ où $1 - \frac{1}{x}$ est substitué à la variable y.

On dit que $h = f \circ u$ est la **composée** de la fonction u par la fonction f.

Décomposer une fonction Partie 2/2

Fonction : $h : x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$

Si $h(x)$ est défini, décomposons le calcul de $h(x)$:

- on part de x auquel on associe $1 - \dfrac{1}{x}$ par la fonction $u : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x}$.
- ensuite à $u(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ on associe $f(u(x)) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$ par la fonction $f : y \mapsto y^7$ où $1 - \dfrac{1}{x}$ est substitué à la variable y.

On dit que $h = f \circ u$ est la **composée** de la fonction u par la fonction f.

$$\overbrace{x \xmapsto{u} 1 - \frac{1}{x} \xmapsto{f} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^7}^{\xrightarrow{\quad\quad h \quad\quad}}$$

Plan

Définition d'une fonction composée

Limite d'une fonction composée

Limite d'une fonction composée Partie 1/4

Limite de $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$ en $-\infty$

Il suffit de suivre l'expression calculée au cours de la composition :

- On part de x qui tend vers $-\infty$, auquel on associe $2-x$ qui tend alors vers $+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} 2-x = +\infty$.
- À $2-x$ qui tend donc vers $+\infty$, on associe $\sqrt{2-x}$.Or $\lim\limits_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$, donc puisqu'on peut substituer $2-x$ à y par composition, $\sqrt{2-x}$ va tendre vers $+\infty$.

$$\begin{array}{c}
\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad g \qquad\qquad\qquad} \\
\underset{-\infty}{x} \overset{u}{\longmapsto} \underset{+\infty}{2-x} \overset{f}{\longmapsto} \underset{+\infty}{\sqrt{2-x}}
\end{array}$$

Limite d'une fonction composée Partie 2/4

Limite de $g : x \mapsto \sqrt{2 - x}$ en $-\infty$

Sur une copie, on rédige ainsi :

Limite d'une fonction composée Partie 2/4

Limite de $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$ en $-\infty$

Sur une copie, on rédige ainsi :

- On a $\lim\limits_{x \to -\infty} 2 - x = +\infty$.

Limite d'une fonction composée Partie 2/4

Limite de $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$ en $-\infty$

Sur une copie, on rédige ainsi :

- On a $\lim\limits_{x \to -\infty} 2 - x = +\infty$.
- On pose $y = 2 - x$ et on a $\lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt{y} = +\infty$

Limite d'une fonction composée Partie 2/4

Limite de $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$ en $-\infty$

Sur une copie, on rédige ainsi :

- On a $\lim\limits_{x \to -\infty} 2 - x = +\infty$.
- On pose $y = 2 - x$ et on a $\lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt{y} = +\infty$
- Par **composition**, on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2-x} = +\infty$

Limite d'une fonction composée Partie 3/4

Limite de $h : x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$ en 0^+

Il suffit de suivre l'expression calculée au cours de la composition :

Limite d'une fonction composée Partie 3/4

Limite de $h : x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$ en 0^+

Il suffit de suivre l'expression calculée au cours de la composition :

- On part de x qui tend vers 0^+, auquel on associe $1 - \dfrac{1}{x}$ qui tend alors vers $-\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Limite d'une fonction composée Partie 3/4

Limite de $h : x \mapsto \left(1-\frac{1}{x}\right)^7$ en 0^+

Il suffit de suivre l'expression calculée au cours de la composition :

- On part de x qui tend vers 0^+, auquel on associe $1-\frac{1}{x}$ qui tend alors vers $-\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\frac{1}{x} = -\infty$.
- À $1-\frac{1}{x}$ qui tend donc vers $-\infty$, on associe $\left(1-\frac{1}{x}\right)^7$.Or $\lim\limits_{y\to -\infty} y^7 = -\infty$, donc puisqu'on peut substituer $\left(1-\frac{1}{x}\right)^7$ à y par composition, $\left(1-\frac{1}{x}\right)^7$ va tendre vers $-\infty$.

Limite d'une fonction composée Partie 3/4

Limite de $h : x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$ en 0^+

Il suffit de suivre l'expression calculée au cours de la composition :

- On part de x qui tend vers 0^+, auquel on associe $1 - \dfrac{1}{x}$ qui tend alors vers $-\infty$ car $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{1}{x} = -\infty$.
- À $1 - \dfrac{1}{x}$ qui tend donc vers $-\infty$, on associe $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$.Or $\displaystyle\lim_{y \to -\infty} y^7 = -\infty$, donc puisqu'on peut substituer $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$ à y par composition, $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$ va tendre vers $-\infty$.

$$\begin{array}{ccccc} \multicolumn{5}{c}{\xrightarrow{\qquad\qquad\quad g \quad\qquad\qquad}} \\ x & \overset{u}{\longmapsto} & 1-\frac{1}{x} & \overset{f}{\longmapsto} & \left(1-\frac{1}{x}\right)^7 \\ 0^+ & & -\infty & & -\infty \end{array}$$

Limite d'une fonction composée Partie 2/4

Limite de $h : x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$ en 0^+

Sur une copie, on rédige ainsi :

Limite d'une fonction composée Partie 2/4

Limite de $h : x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$ en 0^+

Sur une copie, on rédige ainsi :

- On a $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Limite d'une fonction composée Partie 2/4

Limite de $h : x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$ en 0^+

Sur une copie, on rédige ainsi :

- On a $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \dfrac{1}{x} = -\infty$.
- On pose $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ et on a $\lim\limits_{y \to -\infty} y^7 = -\infty$

Limite d'une fonction composée Partie 2/4

Limite de $h : x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7$ en 0^+

Sur une copie, on rédige ainsi :

- On a $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \dfrac{1}{x} = -\infty$.
- On pose $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ et on a $\lim\limits_{y \to -\infty} y^7 = -\infty$
- Par **composition**, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7 = -\infty$