Équations différentielles

Activité 1 p. 119

Dynamique des populations : du discret au continu

En 1950, un pays comptait 30,5 millions d'habitants. Depuis cette date, sa population a un taux annuel moyen de natalité de 20 pour 1 000, c'est-à-dire qu'il y a en moyenne 20 naissances enregistrées au cours d'une année pour 1 000 habitants.

De façon analogue, depuis 1950, le taux annuel moyen de mortalité est de 15 pour 1 000.

De plus, chaque année en moyenne, 100 000 nouveaux arrivants s'installent dans ce pays.

Objectif : on se propose d'étudier l'évolution démographique de ce pays.

1 Modèle à temps discret

On note $P(n)$ la population de ce pays, en million d'habitants, l'année $1950+n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $P(0)=30,5$.

a) Utiliser les informations données sur l'évolution de cette population pour expliquer pourquoi pour tout entier naturel n,

$$P(n+1)-P(n)=0,005P(n)+0,1.$$

Penser à convertir 100 000 habitants en million d'habitants.

b) À l'aide de la calculatrice, estimer la population de ce pays en 2050, si les conditions d'évolution restent inchangées.

a) Pour 1 000 000 habitants déjà présents dans la population, on a

- $20 \times 1000 = 20000$ naissances
- $15 \times 1000 = 15000$ décès

donc au total, $5000 = 0,005$ millions nouveaux individus par million d'individu déjà présent

Donc pour $P(n)$ millions d'habitants

on aura $0{,}005 \times P(n)$ nouveaux individus à cause de la dynamique interne de la population.

De plus on a 100000 habitants soit 0,1 million qui viennent de l'extérieur.

Donc on a $P(n+1) = P(n) + 0{,}005\,P(n) + 0{,}1$

rad SEQUENCES

Sequences Graph Table

Set the interval

n	u_n
0	30.5
1	30.7525
2	31.00626
100	63.15676
4	31.5176
5	31.77519
6	32.03406
7	[illegible]

Population en 2050 selon ce modèle, environ 63,16 millions d'habitants

2 **Modèle à temps continu**

On considère la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, qui à un instant $1950+t$, en année, associe la population de ce pays à cet instant.

Ainsi, $P(0)=30{,}5$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, $P(t+1)-P(t)=0{,}005P(t)+0{,}1$ (**R**).

a) On suppose que la fonction P est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on approche $P(t+1)-P(t)$, c'est-à-dire $\dfrac{P(t+1)-P(t)}{(t+1)-t}$, par $P'(t)$.

Pour tout réel $t \geqslant 0$, $P'(t)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{P(t+h)-P(t)}{h}$.
En démographie, en économie, etc., il est fréquent que l'on approche $P'(t)$ par $P(t+1)-P(t)$.

Avec la relation (**R**), exprimer $P'(t)$ en fonction de $P(t)$.

b) Vérifier que toute fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $P(t)=ke^{0{,}005t}-20$ (avec k nombre réel) est une solution de l'équation différentielle obtenue au **a)**.

Une équation du type $y'=ay+b$ d'inconnue une fonction y est une **équation différentielle**.

c) Utiliser la condition initiale $P(0)=30{,}5$ pour déterminer k.

d) En supposant que l'évolution se poursuive ainsi, estimer alors la population de ce pays en 2050. Comparer à l'estimation obtenue à la question **1 b)**.

a) Pour tout $t \geqslant 0$, en approchant $P(t+1)-P(t)$ par $P'(t)$ dans la relation (R), il vient :

$$P'(t)=0{,}005\,P(t)+0{,}1$$

b) Pour tout $t \geqslant 0$

si $f(t)=k\,e^{0{,}005t}-20$

alors $f'(t)=k\times 0{,}005\,e^{0{,}005t}$

$f'(t)=0{,}005\,k\,e^{0{,}005t}$

Par ailleurs, $0{,}005\,f(t)+0{,}1=0{,}005\times\left(k\times e^{0{,}005t}-20\right)+0{,}1$

$0{,}005f(t)+0{,}1=0{,}005\,k\times e^{0{,}005t}-0{,}1+0{,}1$

$0{,}005f(t)+0{,}1=0{,}005\,k\times e^{0{,}005t}$

On en déduit que pour tout $t\geqslant 0$, on a :

$$0{,}005\,f(t)+0{,}1=f'(t)$$

La fonction $f : t \longmapsto k\times e^{0{,}005t}-20$ est donc solution de l'équation différentielle

(E) $P'(t)=0{,}005\,P(t)+0{,}1$ sur $[0\,;+\infty[$

c) D'après la condition initiale $P(0) = 30{,}5$ on en déduit que :

$$f(0) = 30{,}5 \iff k \times e^{0{,}005 \times 0} - 20 = 30{,}5$$
$$\iff k = 50{,}5$$

On a donc $f : t \mapsto 50{,}5\, e^{0{,}005t} - 20$ solution de l'équation différentielle (E) avec la condition initiale $f(0) = 30{,}5$ et donc f est un modèle i[illegible]le d'é[illegible]on de la [illegible]on.

En 2050, d'après ce modèle continu, la population serait de :

$$f(100) = 50{,}5 \times e^{0{,}005 \times 100} - 20 = 50{,}5 \times e^{0{,}5} - 20$$
$$f(100) \approx 63{,}26 \text{ millions}$$

On retrouve une valeur proche de celle estimée par le modèle discret.

poss volut popula

Capacité 1 ***Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle***

On considère l'équation différentielle (E) définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E)\ :\ y' - 2y = x - 1$$

1. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ est solution de l'équation E.

2. **a.** Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle (E_0) définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par $y' - 2y = 0$.
L'équation (E_0) est *l'équation homogène* ou *équation avec second membre nul* associée à l'équation (E).

b. Déterminer une autre solution de l'équation différentielle homogène (E_0).

c. Déterminer la solution de l'équation différentielle homogène (E_0) telle que $y(0) = 3$.

3. **a.** Démontrer que la fonction $h = f + g$ est solution de l'équation différentielle (E).

b. Déterminer une autre solution de l'équation différentielle (E).

1) Pour tout réel x, $f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$
donc $f'(x) = -\frac{1}{2}$
donc $f'(x) - 2f(x) = -\frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} = x - 1$
donc f solution de l'équation
$(E) : y' - 2y = x - 1$.

2) a) Soit g définie sur $\mathbb{R}$.
g dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$g'(x) - 2g(x) = 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$$

donc g solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$

b) Toute fonction g_k définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x :

$g_k(x) = k e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$

c) Soit $g_k : x \mapsto k e^{2x}$ avec k constante réelle

une fonction solution de $y' - 2y = 0$
d'après 2) b).

$$g_k(0) = 3 \iff k \times e^{2 \times 0} = 3$$

$$g_k(0) = 3 \iff k = 3$$

La fonction $g_3 : x \mapsto 3e^{2x}$ est donc solution de (E_0) et vérifie $g_3(0) = 3$.

3) a) Soit la fonction $h = f + g$

3) a) Soit $h = f + g$.

avec f solution de l'équation (E)
et g solution de l'équation (E_0)

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$f'(x) - 2f(x) = x - 1$ car f solution de (E)

et $g'(x) - 2g(x) = 0$ car g solution de (E_0)

donc $f'(x) + g'(x) - 2f(x) - 2g(x) = x - 1$

en additionnant membre à membre

et donc $(f+g)'(x) - 2(f+g)(x) = x - 1$

Ainsi $f+g$ solution de l'équation (E)

b) Une autre solution de l'équation (E) s'obtient donc à partir de la solution f en lui ajoutant une solution g de l'équation homogène.

Par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) + 3e^{2x}$ est solution de l'équation (E)

Capacité 2 ***Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle ⇒ capacité 1 p. 297***

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

   a. Vérifier que la fonction F définie sur R par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ est une primitive de f.

   b. Déterminer d'autres primitives de la f.

2. Compléter le tableau de primitives :

Fonction f	Intervalle I	Une primitive F parmi une infinité ...
$f(x) = 1$	$\mathbb{R}$	....
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	....
$f(x) = 3x - 2$	$\mathbb{R}$	....
$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$	....
$f(x) = e^x + e^{-x}$	$\mathbb{R}$	....

1) a) Pour tout réel x :

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$

donc $F'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$

donc F primitive de f

b) Toute fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = F(x) + k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et vérifie pour tout réel x :

$$F_k'(x) = x^2$$

donc F_k est une primitive de f.

2)

Fonction f	Intervalle I	Une primitive F parmi une infinité ...
$f(x)=1$	$\mathbb{R}$	$F(x) = x$
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x)=3x-2$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x$
$f(x) = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$	$F(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$
$f(x)=e^x+e^{-x}$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x - e^{-x}$

Capacité 3 ***Vérifier qu'une fonction est un primitive d'une autre fonction ⇒ capacité 2 p. 297***

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;4]$ par $f(x) = (3,6x+2,4)e^{-0,6x} - 1,4$.

1. Vérifier que la fonction que la fonction F définie par $F(x) = (-6x-14)e^{-0,6x} - 1,4x$ est une primitive de f.

2. Déterminer la solution sur $[0;4]$ de l'équation différentielle $y' = f$ qui vérifie $y(0) = 10$.

1) Pour tout réel x.

$$F(x) = (-6x-14)e^{-0,6x} - 1,4x$$

donc $F'(x) = -6e^{-0,6x} - 0,6e^{-0,6x}(-6x-14) - 1,4$

$$F'(x) = e^{-0,6x}(3,6x+8,4-6) - 1,4 = f(x)$$

donc F primitive de f.

2) $F' = f$ donc F solution de l'équa-tion différentielle $y' = f$.

Soit k un réel, la fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k'(x) = F(x) + k$ vérifie pour tout réel x :

$$F_k'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$$

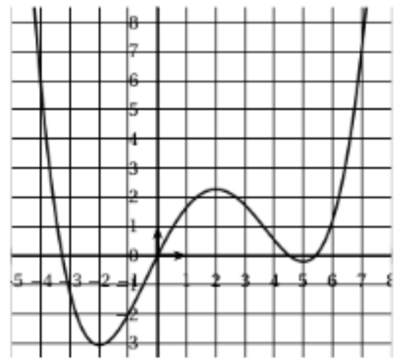
donc F_k solution de $y' = f$.

$$F_k(0) = F(0) + k = 10 \iff -14 + k = 10$$
$$\iff k = 24$$

F_{14} définie sur $\mathbb{R}$ par $F_{14}(x) = F(x) + 24$ est donc solution de l'équation diffé-rentielle $y' = y$ et vérifie $y(0) = 10$.

Capacité 4 *Échelle des dérivées*

On considère la courbe d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.



Pour chaque question, sélectionner la ou les bonne(s) réponse(s).

1. Soit f' la dérivée de f et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

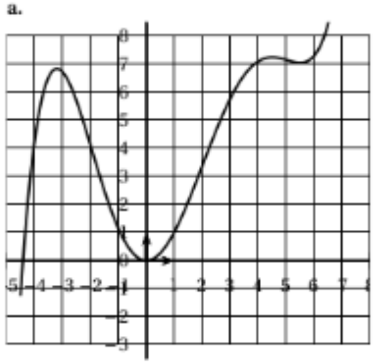
(A1) **a.** f' est positive sur $[2 ; 4]$. Faux

(A2) **b.** f' est négative sur $[-4,5 ; -4]$ Vrai

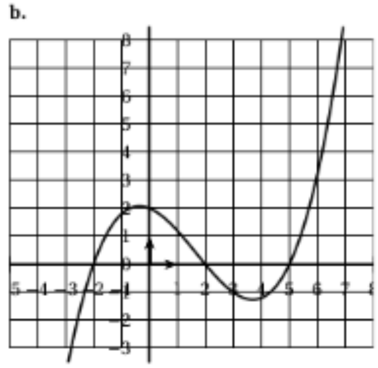
c. F est décroissante sur $[2 ; 4]$. Faux

d. F est décroissante sur $[-3 ; -1]$ Vrai

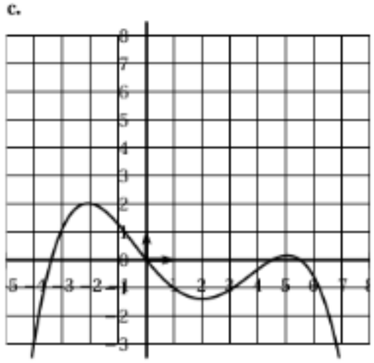
a.



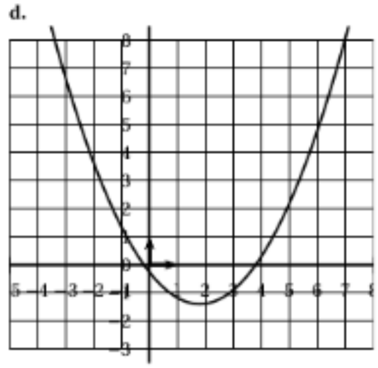
b.



c.



d.



2. Une des courbes ci-dessus représente la fonction f''. Laquelle? la d)

$\Rightarrow$ f convexe sur $]-\infty;0]$ et sur $[4;+\infty[$
et concave sur $[0;4]$

Capacité 5 *Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence* ⇒ *exo 5 p.123*

1. Pour chacune des fonctions f suivantes, continue sur I, déterminer l'ensemble des primitives de f sur $]0;+\infty[$.

   a. $f(x)=4$ sur $I=\mathbb{R}$;

   b. $f(x)=0$ sur $I=\mathbb{R}$;

   c. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I=]0;+\infty[$;

   d. $f(x)=3+x+x^4$ sur $I=\mathbb{R}$;

   e. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ sur $I=]0;+\infty[$;

   f. $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}$ sur $I=\mathbb{R}$;

   g. $f(x)=\dfrac{-1}{x}$ sur $I=]-\infty;0[$.

2. Démontrer que la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F: x\mapsto x\ln x - x + 1$ est une primitive de la fonction ln. Déterminer la primitive de la fonction ln qui s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$.

1) a) Les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f: x\mapsto 4$ sont les fonctions $F_k: x\mapsto 4x+k$ avec k constante réelle

b) Les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f: x\mapsto 0$ sont les fonctions $F_k: x\mapsto k$ avec k constante réelle

c) Les primitives sur $]0;+\infty[$ de $f: x\mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sont les fonctions $F_k: x\mapsto 2\sqrt{x}+k$ avec k constante réelle

d) Les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f: x\mapsto 3+x+x^4$ les fonctions $F_k: x\mapsto 3x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5}x^5+k$ avec k constante réelle

e) Les primitives sur $]0;+\infty[$ de $f: x\mapsto \frac{1}{x^2}$ sont les fonctions $F_k: x\mapsto -\frac{1}{x}+k$ avec k constante réelle

f) Les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f: x\mapsto e^{-2x}$ sont les fonctions $F_k: x\mapsto \frac{1}{-2}e^{-2x}+k$ avec k constante réelle

g) Les primitives sur $]-\infty;0[$ de $f: x\mapsto -\frac{1}{x}$ sont les fonctions $F_k: x\mapsto -\ln(|x|)$ avec k constante réelle

2) Soit F la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ telle que pour tout réel $x>0$:

$$F(x) = x\ln(x) - x + 1$$

Pour tout $x>0$ on a :

$$F'(x) = 1\times \ln(x) + x\times\frac{1}{x} - 1 = \ln(x)+1-1 = \ln(x)$$

donc F est une primitive de la fonction ln

Soit G une primitive de la fonction ln, d'après une propriété du cours, pour tout $x>0$:

$$G(x) = F(x) + k$$

G s'annule en $\sqrt{e}$ ssi $F(\sqrt{e})+k=0$

ssi $\sqrt{e}\ln(\sqrt{e}) - \sqrt{e} + 1 + k = 0$

ssi $\sqrt{e}\times\frac{1}{2}\ln(e) - \sqrt{e} + 1 + k = 0$

ssi $-\frac{1}{2}\sqrt{e} + 1 + k = 0$

ssi $k = \frac{1}{2}\sqrt{e} - 1$

La primitive de la fonction ln qui s'annule en $\sqrt{e}$ est donc :

$$G : x \mapsto x\ln(x) - x + 1$$

Capacité 6 ***Calculer une primitive de fonction de la forme*** $(v' \circ u) \times u'$ $\Rightarrow$ ***exo 6 p.123***

Pour chacune des fonctions f suivantes, continues sur un intervalle I, déterminer l'ensemble des primitives de f sur I.

1. $f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + e^x$ sur $I =]0\,;+\infty[$;
2. $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$;
3. $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$;
4. $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ sur $I = \mathbb{R}$;
5. $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$;
6. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur $I =]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$;

1) Les primitives sur $]0;+\infty[$ de $f : x \mapsto x^2 - 2x - 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + e^x$ sont les fonctions de la forme :

$$F : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + \frac{1}{x} - \ln(x) + e^x + k$$

2) Pour tout réel x, $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{-u'(x)}{u^2(x)}$

en posant $u(x) = e^x + 1$

Les primitives de f sont donc de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{u(x)} + k = -\frac{1}{e^x+1} + k$$

3) Pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = e^x + 1$$

Les primitives de f sont donc de la forme :

$$F(x) = \ln(|u(x)|) + k = \ln(|e^x+1|) + k$$ avec k constante réelle

Or pour tout réel x, on a $|e^x+1| = e^x+1$

donc $$F(x) = \ln(e^x+1) + k$$

4) Pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{x}{e^{x^2}} = x \times e^{-x^2} = -\frac{1}{2}u'(x) \times e^{u(x)} \quad \text{avec } u(x) = -x^2$$

Les primitives de f sont donc de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{u(x)} + k = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$$ avec k constante réelle

5) Pour tout réel $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{1}{x\ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{avec } u(x) = \ln(x)$$

Les primitives de f sont donc de la forme :

$$F(x) = \ln(|u(x)|) + k = \ln(|\ln(x)|) + k$$ avec k constante réelle

<u>1er cas</u> : $x \in]0;1[$

$\ln(x) < 0$ donc $|\ln(x)| = -\ln(x)$

et donc $F(x) = \ln(-\ln(x)) + k$

<u>2ème cas</u> : $x \in]1;+\infty[$

$\ln(x) > 0$ donc $|\ln(x)| = \ln(x)$

et donc $F(x) = \ln(\ln(x)) + k$

Capacité 7 ***Résoudre une équation différentielle*** $y' = ay \Rightarrow$ ***capacité 5 p. 301***

Soit (E) l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $y' - 6y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 3$.

1) Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

(E) $y' - 6y = 0 \Leftrightarrow y' = 6y$

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $y : x \mapsto Ce^{6x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2) Soit f une solution de l'équation (E) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{6x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$f(0) = 3 \Leftrightarrow Ce^{6 \times 0} = 3 \Leftrightarrow C = 3$

La solution f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 3$ est donc la fonction $f : x \mapsto 3e^{6x}$

Capacité 8 ***Résoudre une équation différentielle*** $y' = ay + b \Rightarrow$ ***capacité 6 p. 301***

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ 10v'(t) + v(t) = 30$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. On suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$. En déduire l'expression de la fonction v.

1) Soit v une fonction dérivable sur $[0; +\infty[$.
qui est solution de l'équation (E).

Pour tout réel $t \geq 0$:

(E) $10v'(t) + v(t) = 30 \iff v'(t) = -\frac{1}{10}v(t) + 3$

. Résolvons l'équation (E) :

• On recherche la solution particulière constante :
On considère une fonction v constante et solution de (E).
D'une part il existe une constante k telle que pour tout réel $t \geq 0$, $v(t) = k$ et donc $v'(t) = 0$
D'autre part, pour tout réel $t \geq 0$:

$v'(t) = -\frac{1}{10}v(t) + 3 \iff 0 = -\frac{k}{10} + 3$

$\iff k = 30$

la solution particulière constante de l'équa-

- Sol (E) est donc la fonction :

$$v : t \longmapsto 30.$$

- Ensuite on résout l'équation homogène.

Pour tout réel $t \geq 0$:

(E_0) : $10v'(t) + v(t) = 0 \iff v'(t) = -\frac{1}{10}v(t)$

D'après une propriété du cours, les solutions de l'équation (E_0) sont les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par :

$$v : t \longmapsto Ce^{-\frac{1}{10}t} \quad \text{avec } C \text{ réel}$$

Finalement on peut conclure que les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$$v : t \longmapsto Ce^{-\frac{1}{10}t} + 30 \quad \text{avec } C \text{ réel}$$

2) On recherche la solution de (E) telle que $v(0) = 0$. D'après la question précédente : v a pour expression :

$$v(t) = Ce^{-\frac{1}{10}t} + 30$$

$v(0) = 0 \iff Ce^{-\frac{1}{10}\times 0} + 30 = 0 \iff C = -30$

La solution de l'équation (E) telle que $v(0)=0$ est donc la fonction :

$$v : t \mapsto 30\left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right)$$

$\boxed{\text{Thème 1}}$

Partie A : modèle discret

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k\,(T_n - M)$$

où k est une constante réelle.
Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0,2\,(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.
   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
   c. Déterminer la limite de la suite (T_n).

1) Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$T_{n+1} - T_n = -0,2\,(T_n - 10)$$

avec $T_0 = 80$
On peut conjecturer que pour tout entier $n \geq 0$, on a $T_n \geq 10$ et donc $T_{n+1} - T_n \leq 0$
et donc $(T_n)_{n\geq 0}$ croissante.

En effet, il est difficile d'imaginer que

La température de la tasse augmente si elle est inférieure à celle du milieu environnant...

2) Pour tout entier $n \geq 0$:

$$T_{n+1} - T_n = -0{,}2\,(T_n - 10)$$

$$T_{n+1} = T_n - 0{,}2T_n + 0{,}2 \times 10$$

$$T_{n+1} = (1-0{,}2)T_n + 2$$

$$T_{n+1} = 0{,}8T_n + 2$$

3) Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on pose :
$u_n = T_n - 10$

a) Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$u_{n+1} = T_{n+1} - 10 = 0{,}8T_n + 2 - 10$$

$$u_{n+1} = 0{,}8T_n - 8 = 0{,}8(T_n - 10) = 0{,}8u_n$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $0{,}8$.

b) D'après une propriété du cours, pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$u_n = u_0 \times 0{,}8^n \quad \text{avec } u_0 = T_0 - 10 = 70$$

On a donc pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$u_n = 70 \times 0{,}8^n$$

et on en déduit que : $T_n = u_n + 10$

$$T_n = 70 \times 0{,}8^n + 10$$

c) On a $|0{,}8| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 70 \times 0{,}8^n = 0$

et par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 10$

4. On considère la fonction Python suivante :

Tant que $T \geqslant 40$
$T \leftarrow 0{,}8T + 2$
$n \leftarrow n + 1$
Fin Tant que

```
def seuil(s):
    t = 80
    n = 0
    while t >= s :
        t = 0.8*t+2
        n = n+1
    return n
```

a. Quelle valeur numérique est renvoyée par `seuil(40)` ?

b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Entrée[1]:
```python
def seuil(s):
    t = 80
    n = 0
    while t >= s:
        t = 0.8 * t + 2
        n = n + 1
    return n
```

Entrée[2]:
```python
seuil(40)
```

Sortie[2]: 4

On en déduit qu'au bout de 4 minutes la température de la tasse est inférieure à 40°C.

Partie B : modèle continu

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'équation différentielle (E_M) :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et solution de l'équation différentielle (E_0).

$$\theta'(t) = -0,2\theta(t)$$

   Déterminer la fonction θ solution particulière de l'équation différentielle (E_0) vérifiant la condition initiale $\theta(0) = 80$.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$.

   a. Déterminer la fonction g solution particulière de l'équation différentielle (E_{10}) vérifiant la condition initiale $g(0) = 80$.

   b. Une personne aime boire son café à 40 °C.
   Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0 ; +\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$.
   Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.

1) D'après une propriété du cours les fonctions Θ dérivables sur $[0;+\infty[$ qui sont solutions de l'équation :

$$(E_0) : \Theta'(t) = -0,2\,\Theta(t)$$

sont les fonctions $\Theta : t \longmapsto C e^{-0,2t}$

avec C constante réelle.

Une solution vérifiant $\Theta(0) = 80$ est donc telle que :

$$C \times e^{-0,2\times 0} = 80 \iff C = 80$$

La solution vérifiant $\Theta(0) = 80$ est donc la fonction :

$$\Theta : t \longmapsto 80\,e^{-0,2t}$$

2) On choisit $M = 10$.

L'équation différentielle que nous souhaitons résoudre sur $[0;+\infty[$ est :

$$(E)\ \Theta'(t) = -0,2(\Theta(t) - 10)$$

$(E) \iff \theta'(t) = -0{,}2\,\theta(t) + 2$

(E) de la forme $y' = ay + b$

avec $a = -0{,}2$ et $b = 2$

D'après une propriété du cours,

une solution particulière de (E) est

la fonction constante $t \longmapsto -\dfrac{b}{a}$

c'est-à-dire $t \longmapsto \dfrac{-2}{-0{,}2}$

$t \longmapsto 10$

De plus les solutions de (E) sont

les fonctions θ dérivables sur $[0;+\infty[$

telles que :

$$\theta : t \longmapsto \underbrace{10}_{\substack{\text{solution} \\ \text{particulière} \\ \text{de } (E)}} + \underbrace{C \times e^{-0{,}2t}}_{\substack{\text{solution} \\ \text{de } (E_0)}} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Une solution g vérifiant $g(0) = 80$ est telle que :

$$g(0) = 80 \iff 10 + C \times e^{-0,2 \times 0} = 80$$
$$\iff C = 70$$

La solution g de (E) vérifiant $g(0) = 80$ est donc $g : t \longmapsto 10 + 70 \times e^{-0,2t}$

b) $g(t_0) = 40 \iff 10 + 70 \times e^{-0,2t_0} = 40$

$$\iff e^{-0,2t_0} = \frac{3}{7}$$
$$\iff t_0 = \frac{1}{-0,2} \times \ln\left(\frac{3}{7}\right)$$
$$\iff t_0 \simeq 4,24 \text{ min}$$