Histoire 1

Jacques Bernoulli (1654-1705) énonce la **loi binomiale** dans son ouvrage *Ars Conjectandi* édité par son neveu Nicolas Bernoulli. L'oncle appelle *cas féconds* les cas dans lesquels un événement peut se produire et *cas stériles*, ceux où il ne peut pas se produire. Il établit que si la probabilité des cas féconds est de r et celle des cas stériles de s, sur une succession de nt expériences : « *les degrés de probabilités [...] pour lesquels il peut arriver que toutes les expériences soient fécondes ou toutes le soient sauf une qui est stérile, ou toutes sauf deux, 3, 4 qui sont stériles s'expriment respectivement par :*

$$r^{nt}, \frac{nt}{1}r^{nt-1}s, \frac{nt(nt-1)}{1\times 2}r^{nt-2}s^2, \frac{nt(nt-1)(nt-2)}{1\times 2\times 3}r^{nt-3}s^3 \dots$$

c'est-à-dire par les termes de la puissance nt du binôme $r+s$. »

1 Deux lois discrètes

1.1 Loi uniforme discrète sur $\{1, 2, \dots, n\}$

Définition 1

Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ où n est un entier naturel non nul.

X suit une **loi uniforme** sur $\{1, 2, \dots, n\}$ si toutes les valeurs prises par X sont équiprobables c'est-à-dire que pour tout entier $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$$

Capacité 1 ***Utiliser ou identifier une loi uniforme discrète, voir exo résolu 1 p. 197***

On considère le jeu suivant :

- dans n boîtes sont réparties aléatoirement les n sommes d'argent de 1, 2, 3, ... $n-1$ et n euros ;
- le joueur mise a euros, choisit au hasard une boîte et remporte la somme d'argent contenue dans la boîte.

1. Dans cette question on suppose que le joueur mise $a = 3$ euros et qu'il choisit parmi $n = 6$ boîtes.
   - **a.** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire G donnant le gain du candidat obtenu en faisant la différence de la somme découverte dans la boîte choisie et de sa mise.
   - **b.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.
   - **c.** Calculer l'espérance $\mathbb{E}(G)$ de la variable aléatoire G et interpréter sa valeur.
2. Dans cette question on suppose que le joueur mise a euros et qu'il choisit parmi $n = 6$ boîtes.

   Déterminer la valeur de la mise a pour que le jeu soit équitable.

Propriété 1 ***Espérance d'une loi uniforme discrète***

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant une **loi uniforme** sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. L'espérance de X est donnée par la formule :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1+n}{2}$$

Démonstration ***voir manuel Hyperbole p. 196***

$$E(X) = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

1.2 Épreuve et loi de Bernoulli

Définition 2

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire E dont l'univers Ω ne comporte que deux issues appelées « succès » (noté S) et échec (noté $\overline{\mathrm{S}}$) de probabilités respectives p et $1-p$.

La variable aléatoire $\mathrm{X} : \Omega \to \{0, 1\}$ qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p,qu'on note $\mathscr{B}(p)$.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p, est donnée par le tableau :

k	1	0
$\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$	p	$1-p$

Capacité 2 ***Identifier une épreuve de Bernoulli et déterminer son paramètre, voir exo résolu 2 p. 197***

Un joueur mise 2 euros pour participer au jeu suivant :

- On lance deux dés cubiques équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6, et on note les numéros apparaissant sur la face supérieure de chaque dé.
- Le joueur reçoit 4 euros si le produit des numéros apparaissant sur les faces supérieures des deux dés lancés est strictement inférieur à 10, sinon il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (somme reçue moins la mise).

1. **a.** Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

   b. X suit-elle une loi de Bernoulli ? Déterminer la loi de probabilité de X. Ce jeu est-il équitable ?

2. La variable aléatoire $Y = \dfrac{X+2}{4}$ suit-elle une loi de Bernoulli ?

Méthode *Simuler l'aléatoire avec Python*

La bibliothèque `random` de `Python` propose des fonctions permettant de générer des nombres pseudo-aléatoires :

- La fonction `random` permet de générer un nombre décimal choisi aléatoirement dans l'intervalle $[0;1[$ avec l'appel `random()`.
- La fonction `randint` permet de générer un nombre entier choisi aléatoirement entre deux entiers `a` et `b` (bornes incluses), vérifiant `a` $\leqslant$ `b`, avec l'appel `randint(a, b)`.

```
In [1]: from random import random, randint

In [2]: [randint(1, 6) for k in range(3)]
Out[2]: [2, 3, 4]

In [3]: [random() for k in range(2)]
Out[3]: [0.6222757409726671, 0.965200387415264]
```

Algorithmique 1 *Simuler une variable aléatoire de Bernoulli*

On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle « succès » l'apparition de la face 6. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la face est 6 et la valeur 0 sinon.

1. X suit-elle une loi de Bernoulli ? Si oui, déterminer son paramètre.
2. On rappelle que `randint(a, b)` est un entier choisi aléatoirement entre deux entiers `a` et `b` compris. Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour qu'elle simule une réalisation de X :

```
from random import randint

def simulX():
    if randint(1,6)==6 :
        return 1
    else:
        return 0
```

3. De quelle valeur devraient se rapprocher `mystere(1000)`, `mystere(10000)` et `mystere(10**6)` ?

```
from random import randint

def mystere(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + simulX()
    return s / n
```

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 \leqslant p \leqslant 1$.

1. **L'espérance** de X est égale à $\boxed{\mathbb{E}(X) = p}$.
2. **La variance** de X est égale à $\boxed{\mathbb{V}(X) = p(1-p)}$ et **l'écart-type** de X est égal à $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}}$.

Démonstration *Voir manuel Hyperbole p.196*

loi de probabilité de X :

k	1	0
$P(X=k)$	p	$1-p$

$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$

$V(X) = E((X-E(X))^2) = p \times (1-p)^2 + (1-p) \times (0-p)^2$

$V(X) = p(1-p)(1-p+p) = p(1-p)$

et donc $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

2 Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux

2.1 Schéma de Bernoulli

Définition 3

On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p la répétition de n épreuves de Bernoulli (avec $n \geqslant 1$) de paramètre p (avec $0 \leqslant p \leqslant 1$) identiques dans des conditions d'indépendance (c'est à dire que l'issue d'une épreuve ne dépend pas des issues des autres épreuves).

Capacité 3 ***Identifier un schéma de Bernoulli***

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, déterminer si elle peut être modélisée par un schéma de Bernoulli et si oui, préciser ses paramètres.

1. On lance dix fois une pièce équilibrée et on compte le nombre de « Face » obtenues.
2. On lance deux fois un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on compte le nombre de faces paires obtenues.
3. On tire trois fois et avec remise une boule dans une urne contenant 10 noires et 7 boules rouges et on note le nombre de boules rouges obtenues.
4. On tire trois fois et sans remise une boule dans une urne contenant 10 noires et 7 boules rouges et on note le nombre de boules rouges obtenues.

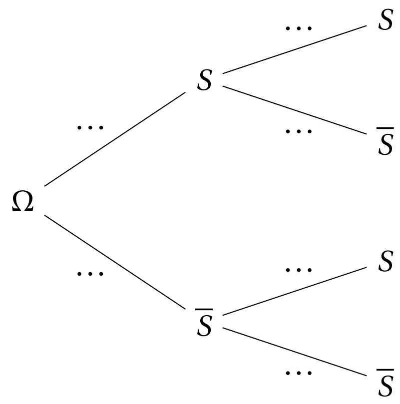
5. Un opérateur de télémarketing appelle 200 clients dans la journée. La probabilité qu'un client accepte l'offre commerciale est de $0,15$. Le chef de l'opérateur note le nombre de clients qui ont accepté l'offre.

Capacité 4 *Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli*

On considère l'épreuve de Bernoulli E de paramètre $p = \frac{1}{6}$ qui consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et à compter comme *succès* l'obtention d'un 6.

1. On répète 2 fois l'expérience aléatoire E de façon indépendante.

   a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous. On a noté S un succès et $\overline{S}$ un échec.



   b. Soit la variable aléatoire X_2 qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{6}$.

   i. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_2 ?

   ii. Déterminer sa loi de probabilité et son espérance.

2. On répète 3 fois l'expérience aléatoire E de façon indépendante.

   a. Représenter ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$ par un arbre pondéré en notant S un succès et $\overline{S}$ un échec.

   b. Soit la variable aléatoire X_3 qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{6}$.

   i. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_3 ?

   ii. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(X_3 = 3)$ et $\mathbb{P}(X_3 = 0)$.

   iii. Combien de chemins dans l'arbre réalisent 2 succès ? Exprimer ce nombre à l'aide d'un coefficient binomial et en déduire une formule de calcul de $\mathbb{P}(X_3 = 2)$.

   iv. Exprimer de même $\mathbb{P}(X_3 = 1)$.

   v. Dresser un tableau de la loi de probabilité de X_3 et déterminer son espérance.

3. On répète n fois (avec $n \geqslant 1$) l'expérience aléatoire E de façon indépendante. Soit la variable aléatoire X_n qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = \frac{1}{6}$.

Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X_n.

```
from random import randint

def simulX(n):
    nbsucces = 0
    for k in range(n):
        if randint(1, 6) ........ :
            nbsucces = .......
    return nbsucces
```

4. On considère désormais la variable aléatoire Y_n qui compte le nombre de 6 obtenus lors de n lancés indépendants, avec $n \geqslant 1$, d'un dé truqué à 6 faces numérotées de 1 à 6. La face 6 a une probabilité égale à p avec $0 \leqslant p \leqslant 1$ et $p \neq \dfrac{1}{6}$.

a. `floor(x)` est le plus grand entier inférieur ou égal au nombre réel `x`. Expliquer pourquoi la fonction Python ci-dessous permet de simuler une réalisation de la variable aléatoire Y_1 qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

```
from random import random
from math import floor

def bernoulli_truque(p):
    return floor(p + random())
```

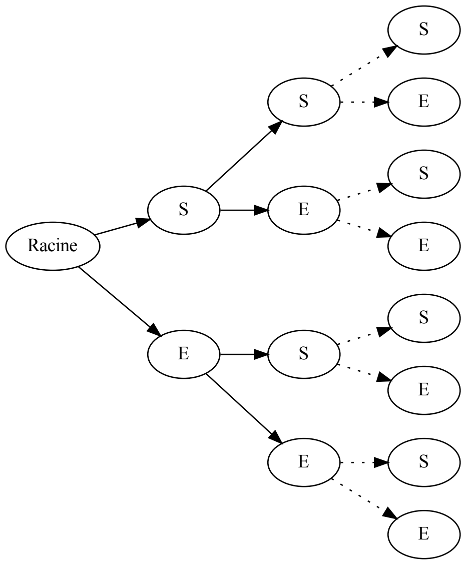
b. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire Y_n.

```
def simulY(n, p):
    nbsucces = 0
    for k in range(n):
        nbsucces = ............
    return nbsucces
```

2.2 Coefficients binomiaux

Définition 4

Un **schéma de Bernoulli** avec n (avec n entier naturel non nul) épreuves de *Bernoulli* identiques et indépendantes peut être représenté par un arbre :



Le **nombre de chemins** dans l'arbre (de la racine jusqu'à une feuille) comportant exactement k **succès** et $n-k$ **échecs** est égal au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, on l'appelle **coefficient binomial** k **parmi** n et on le note $\boxed{\binom{n}{k}}$.

Propriété 3

Soit un entier naturel n et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

- $\binom{0}{0} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ***Propriété de symétrie***

Démonstration ***Voir manuel Hyperbole p.198***

On a 1 chemin réalisant 0 succès, de même pour n succès
donc $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$
Avoir n-k succès équivaut à avoir k échecs
donc $\binom{n}{n-k}$ est le nombre de chemins réalisant k échecs. "Échec" ou "Succès" n'est qu'une étiquette échangeable donc $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

Capacité 5 ***Calculer un coefficient binomial, voir exo résolu 7 p.199***

Un championnat est constitué de 38 matchs. Lors d'un match, deux issues sont possibles : la victoire ou la défaite. On peut modéliser cette situation par un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 38$ et $p = \frac{1}{2}$.
On considère l'arbre représentant ce schéma.

1. Interpréter et calculer les coefficients binomiaux $\binom{38}{38}$, $\binom{38}{0}$, $\binom{38}{1}$ et $\binom{38}{37}$.
2. Avec la calculatrice, déterminer le nombre de chemins réalisant 30 succès.
3. Déterminer le nombre de façons de perdre 8 matchs sur 38.
4. Déterminer le nombre de façons de gagner la moitié des matchs disputés.

2.3 Triangle de Pascal

Théorème 1 ***Relation de Pascal, admise***

Pour tout entier naturel n non nul et tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$$

Méthode ***Calculs des combinaisons $\binom{n}{k}$ avec le triangle de Pascal***

Construction du triangle :

- La propriété $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ permet de placer tous les 1.
- La relation « de Pascal » permet de compléter les autres cases, par exemple $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 6 + 4 = 10$.
- La propriété $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ permet de vérifier la symétrie des coefficients obtenus.

n/k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Triangle « de Pascal » : $\binom{n}{k}$ est à l'intersection de la ligne n et de la colonne k

Algorithmique 2 *Programmer le calcul des coefficients binomiaux*

On considère la fonction Python ci-dessous :

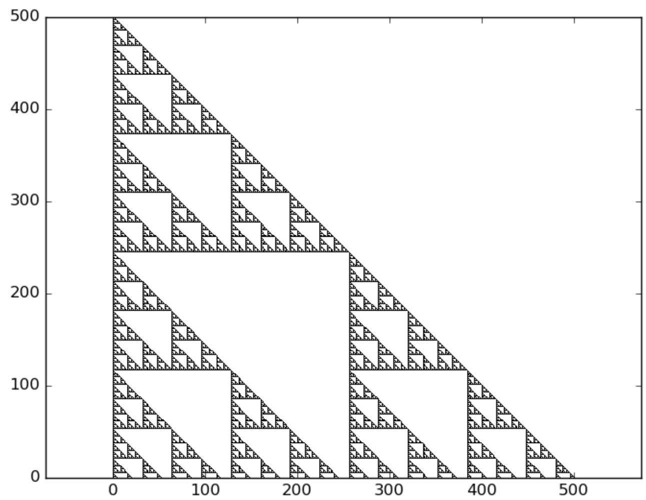
```
1 def blaise(n):
2     L = [1, 1]
3     for i in range(2, n + 1):
4         M = L + [1]
5         for k in range(i - 1):
6             M[k+1] = L[k+1] + L[k]
7         L = M
8     return L
```

1. Recopier et compléter le tableau d'évolution des variables `i`, `k`, `L` et `M` lors de l'exécution de `blaise(3)`.

ligne	4	6	7	4	6	6	7
i	2	2	2	3	3	3	3
k	×	0	×	×	0	1	×
L	[1,1]	[1,1]	[1,2,1]	[1,2,1]	...	...	...
M	[1,1,1]	[1,2,1]	[1,2,1]	[1,2,1, 1]	...	...	...

2. Que représente la liste retournée par `blaise(n)` avec `n` entier naturel ?

3. Déterminer la liste retournée par `blaise(7)`.



3 Loi binomiale

3.1 Loi du nombre de succès

Définition 5

Soit un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p et soit X la variable aléatoire qui à une liste de n résultats $\left(\text{comme } \left(S, \overline{S}, \overline{S}, \cdots, S\right)\right)$ associe le nombre de succès dans cette liste.
On dit que X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Capacité 6 *Reconnaître un schéma de Bernoulli et une loi binomiale*

Déterminer dans chaque cas si on peut modéliser la situation par un schéma de Bernoulli et une loi binomiale et si oui déterminer leurs paramètres.

1. **Situation 1** On s'intéresse à la variable aléatoire V qui compte le nombre d'ampoules avec défaut dans un échantillon de 10 ampoules choisies au hasard parmi la production d'une journée à la sortie d'une machine dont la probabilité de fabrication d'une ampoule sans défaut est égale à 0,9305. La taille du stock permet d'assimiler ce prélèvement à des tirages avec remise.
2. **Situation 2** On s'intéresse à la variable aléatoire X qui compte le nombre de boules rouges obtenues lorsqu'on tire simultanément trois boules dans une urne contenant 60 boules rouges et 40 boules blanches.
3. **Situation 3** On s'intéresse à la variable aléatoire Y qui compte le nombre de boules rouges obtenues lorsqu'on tire successivement avec remise trois boules dans une urne contenant 60 boules rouges et 40 boules blanches.
4. **Situation 4** On s'intéresse à la variable aléatoire Z qui compte le nombre de boules rouges obtenues lorsqu'on tire successivement sans remise trois boules dans une urne contenant 60 boules rouges et 40 boules blanches.

3.2 Loi de probabilité d'une loi binomiale

Propriété 4

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ avec n entier non nul et p réel entre 0 et 1.

Pour tout entier $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ on peut exprimer $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$ en fonction de $\binom{n}{k}$:

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Démonstration *Voir Hyperbole p.200*

L'événement $[X=k]$ est la réunion de $\binom{n}{k}$ événements disjoints correspondant aux chemins avec k succès. Chaque chemin est une séquence de k succès de probabilité p et $n-k$ échecs de probabilité $1-p$ issues d'épreuves indépendantes, donc la probabilité d'un chemin est $p^k(1-p)^{n-k}$.
On en déduit que la probabilité de la réunion des $\binom{n}{k}$ chemins est $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Méthode ***Fonctions préprogrammées de la calculatrice ou du tableur, voir manuel Indice p.372 et p.373***

	Menu	$\mathrm{P}(X = k)$	$\mathrm{P}(X \leqslant k)$
Casio	Touche $\boxed{\textbf{MENU}}$ puis **STAT** puis **DIST**, puis **BINM**	Choisir **Bpd** et **Var** puis saisir les paramètres	Choisir **Bcd** et **Var** puis saisir les paramètres
Texas	Menu $\boxed{\textbf{Distrib}}$ $\left(\boxed{\text{2nde}}\ \boxed{\text{var}}\right)$ puis **binomFdp**, ou **binomFRep**	**binomFdp(n,p,k)**	**binomFrép(n,p,k)**
Numworks	Menu **Calculs** puis **Probabilités** dans la **Boîte à outils**	**binompdf(k, n, p)**	**binomcdf(k, n, p)**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,3)$, si on utilise le tableur `Calc` de `LibreOffice` :

- pour calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}=2)$ dans une cellule, on saisit `=LOI.BINOMIALE(2;10;0,3;0)`
- pour calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}\leqslant 2)$ dans une cellule, on saisit `=LOI.BINOMIALE(2;10;0,3;1)`
- pour calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant 2)$, on passe à l'événement contraire et $\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant 2)=\mathbb{P}(\mathrm{X}>1)=1-\mathbb{P}(\mathrm{X}\leqslant 1)$.

Capacité 7 ***Calculer des probabilités pour une loi binomiale***

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.
Calculer des valeurs approchées des probabilités ci-dessous, avec les fonctions préprogrammées de la calculatrice.

1. $\mathbb{P}(X=3)$
2. $\mathbb{P}(X\leqslant 3)$
3. $\mathbb{P}(X\leqslant 4)$
4. $\mathbb{P}(X\geqslant 4)$
5. $\mathbb{P}(4\leqslant X\leqslant 8)$
6. $\mathbb{P}\big((X\leqslant 4)\cup(8\leqslant X)\big)$

3.3 Modéliser une situation par une loi binomiale

Capacité 8 ***Modéliser une situation par une loi binomiale***

Un concours d'entrée en école d'ingénieurs consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose cinq réponses possibles, dont une seule est correcte. À chaque question, le candidat ou la candidate doit nécessairement choisir une seule réponse. Cette personne gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si sa réponse est fausse.

On considère trois candidats :

- Xavier n'a pas révisé et répond complètement au hasard à toutes les questions. Pour chaque question, la probabilité qu'il réponde correctement est donc de $\frac{1}{5}$.
- Ysoline est mieux préparée. On considère que pour chacune des vingt questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{2}{5}$;
- Zéphyr prépare ce concours depuis le début de l'année : pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est de $\frac{3}{5}$.

1. On note A, B et C les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Xavier, Ysoline et Zéphyr.

a. On admet que la variable aléatoire A suit une loi binomiale. Quels sont ses paramètres ?

b. Expliquer la démarche pour déterminer un arrondi au millième de la probabilité $\mathbb{P}(A \geqslant 10)$ avec la calculatrice.

Dans la suite, on admettra que $\mathbb{P}(A \geqslant 10) \approx 0,003$ et $\mathbb{P}(B \geqslant 10) \approx 0,245$ et $\mathbb{P}(C \geqslant 10) \approx 0,872$.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats. On note X, Y, Z et M les évènements :

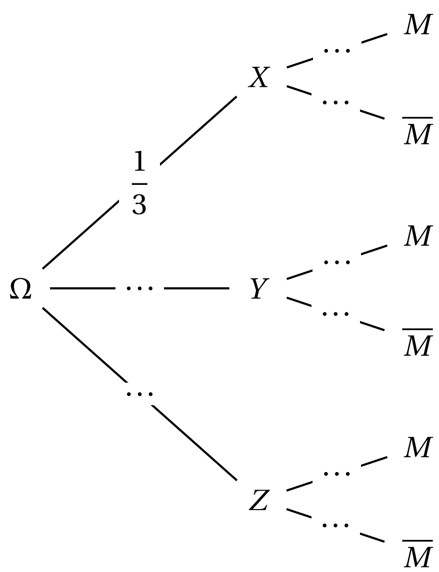
- X : « la copie choisie est celle de Xavier » ;
- Y : « la copie choisie est celle d'Ysoline » ;
- Z : « la copie choisie est celle de Zéphyr » ;
- M : « la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 ».

a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant cette situation.

b. Démontrer que $\mathbb{P}(M) \approx 0,373$.

c. On constate, après l'avoir corrigée, que la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.

Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la copie d'Ysoline ? Donner l'arrondi au millième.



3.4 Espérance, variance et écart-type d'une loi binomiale

Propriété 5

Soit n un entier naturel non nul et p un réel entre 0 et 1.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$ de paramètres n et p.

1. L'espérance de X est $\boxed{\mathbb{E}(X) = np}$.
2. La variance de X est $\boxed{\mathbb{V}(X) = np(1-p)}$.
3. L'écart-type de X est $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$.

Capacité 9 ***Utiliser l'espérance d'une loi binomiale***

Sur une ligne aérienne, une compagnie affrète un appareil de 200 places et vend 202 réservations par vol. On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 202$ et $p = 0,971$.

1. Déterminer le nombre moyen de passagers par vol.
2. Calculer la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement.
3. Calculer la probabilité qu'un seul client parmi les 202 qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement.
4. En déduire la probabilité que la compagnie se trouve en situation de surréservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).

4 Loi géométrique

4.1 Loi discrète du temps d'attente

Algorithmique 3

On note Y la variable aléatoire qui renvoie le rang du premier 6 lorsqu'on lance un dé équilibré à 6 faces jusqu'à l'obtention d'un 6.

1. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(Y = 1)$, $\mathbb{P}(Y = 2)$ et $\mathbb{P}(Y = 3)$.
2. Soit n un entier naturel non nul, exprimer $\mathbb{P}(Y = n)$.
3. Quelles sont les valeurs possibles pour Y ?
4. Compléter la fonction Python `premier6()` pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire Y.

```python
from random import randint

def de():
    return randint(1, 6)

def premier6():
    n = 1
    while ................ :
        n =  ...............
    return n
```

Définition 6

On répète de façon indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p.
La variable aléatoire X qui renvoie le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès, suit une **loi géométrique de paramètre** p.

Propriété 6 ***Loi de probabilité d'une loi géométrique***

Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi géométrique de paramètre** p, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on a :

$$\mathbb{P}\left(X=k\right)=p(1-p)^{k-1}$$

Démonstration ***voir manuel Hyperbole p. 202***

L'évènement $[X=k]$ est réalisé par une séquence de k issues d'épreuves indépendantes : $k-1$ échecs de probabilité $1-p$ et 1 succès de probabilité p.
On en déduit que $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$.

Propriété 7 ***Espérance d'une loi géométrique, admise***

Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi géométrique de paramètre** p, l'espérance de X est égale à :

$$\boxed{\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}}$$

Capacité 10 ***Utiliser une loi géométrique, voir exo 16 p. 203***

1. Quel est le nombre moyen de lancers pour obtenir un premier 6, lors d'une répétition d'expériences indépendantes de lancers d'un dé équilibré à 6 faces ?

2. Dans chaque cas, Y désigne une variable aléatoire, suivant une loi géométrique de paramètre p.

   a. Déterminer p si $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{3}{2}$.

   b. Déterminer p si $\mathbb{P}(Y > 2) = 0,49$.

4.2 Une loi sans mémoire

Propriété 8

Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi géométrique de paramètre** p, pour tout entier ~~naturel~~ $n \geqslant 1$, $n \geqslant 0$
on a :

$$\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$$

Démonstration ***voir manuel Hyperbole exo 15 p.213***

1er cas : $n = 0$ $P(X>n) = 1$ car X ne prend que des valeurs supérieures ou égales à 1.

2ème cas : $n \geqslant 1$

1er sous-cas Si $p = 1$ alors $1-p=0$ et $P(X>n) = 1-1(1+0) = 0$

2ème sous-cas : $\sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1}$ est une somme de termes consécutifs de la suite géométrique de raison $1-p$

donc $\sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} = (1-p)^{1-1} \times \dfrac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = \dfrac{1-(1-p)^n}{p}$

et finalement $P(X>n) = 1 - (1-(1-p)^n)$

$P(X>n) = (1-p)^n$

Propriété 9 ***Loi sans mémoire***

Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi géométrique de paramètre** p.
Pour tous entiers naturels $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$, on a :

$$\mathbb{P}_{X>n}(X > n+k) = \mathbb{P}(X > k)$$

Démonstration *voir manuel Hyperbole p.202*

$$P_{(X>m)}(X>m+k) = \frac{P([X>m+k]\cap[X>m])}{P(X>m)} = \frac{P(X>m+k)}{P(X>m)}$$

D'après la propriété précédente :

$$P_{(X>m)}(X>m+k) = \frac{(1-p)^{m+k}}{(1-p)^m} = (1-p)^k = P(X>k)$$

Capacité 11 *Utiliser une loi géométrique, exercice 92 p.212*

5 Thème du programme : répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage

Thème 1 *Surréservation, Hyperbole exercice 107 p.218*

Table des matières