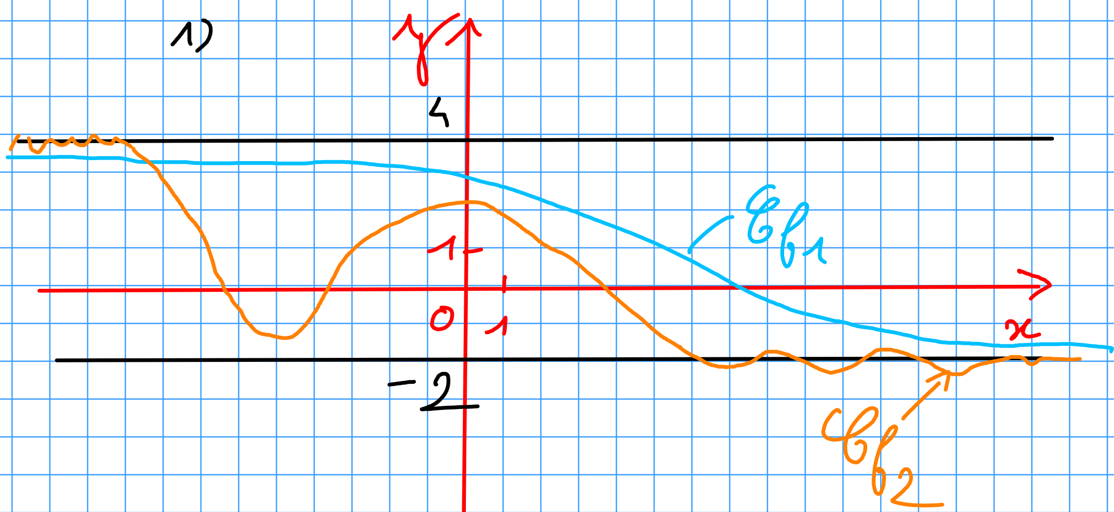
Chapitre limites de fonctions
Corrigés des exemples du cours

Capacité 1 ***Interpréter graphiquement une limite finie en l'infini***

Soit f une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{-\infty} f(x) = 4$ et $\lim_{+\infty} f(x) = -2$.

1. Représenter une courbe possible pour f en traçant ses droites asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$.
2. f est-elle nécessairement une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$?

1)



2) On a $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = -2$ et $\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = 4$

mais f_2 n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

Capacité 2 ***Comprendre la définition d'une limite en l'infini***

1. Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse :
   - **Affirmation 1 :** Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors f croissante sur son intervalle de définition.
   - **Affirmation 2 :** Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors $f(x) < 0$ pour x assez grand.
2. Formulez une propriété vraie si f est une fonction telle que :

   a. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ **b.** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 701$

• Affirmation 1 : Faux on peut donner un contre-exemple graphique

• Affirmation 2 : Faux, idem contre-exemple graphique

2) a) Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ alors pour x assez petit, on a :
$f(x) > 999$

b) Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 701$ alors pour x assez petit, on a :
$f(x) \in \left]701 - 0{,}1 ; 701 + 0{,}1\right[$

Capacité 3 ***Interpréter graphiquement des limites***

On considère une fonction f dont on donne ci-dessous le tableau de variation.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormal du plan.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	731	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	732

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Quelles sont les valeurs de $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$ et de $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$?
3. Quelles sont les limites de f en 1^- et 1^+?
4. Déterminer les éventuelles droites asymptotes horizontales à $\mathscr{C}_f$.
5. Déterminer les éventuelles droites asymptotes verticales à $\mathscr{C}_f$.
6. Dans un repère orthonormal du plan, tracer les droites asymptotes à $\mathscr{C}_f$ puis une représentation possible de $\mathscr{C}_f$.

1) f définie sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

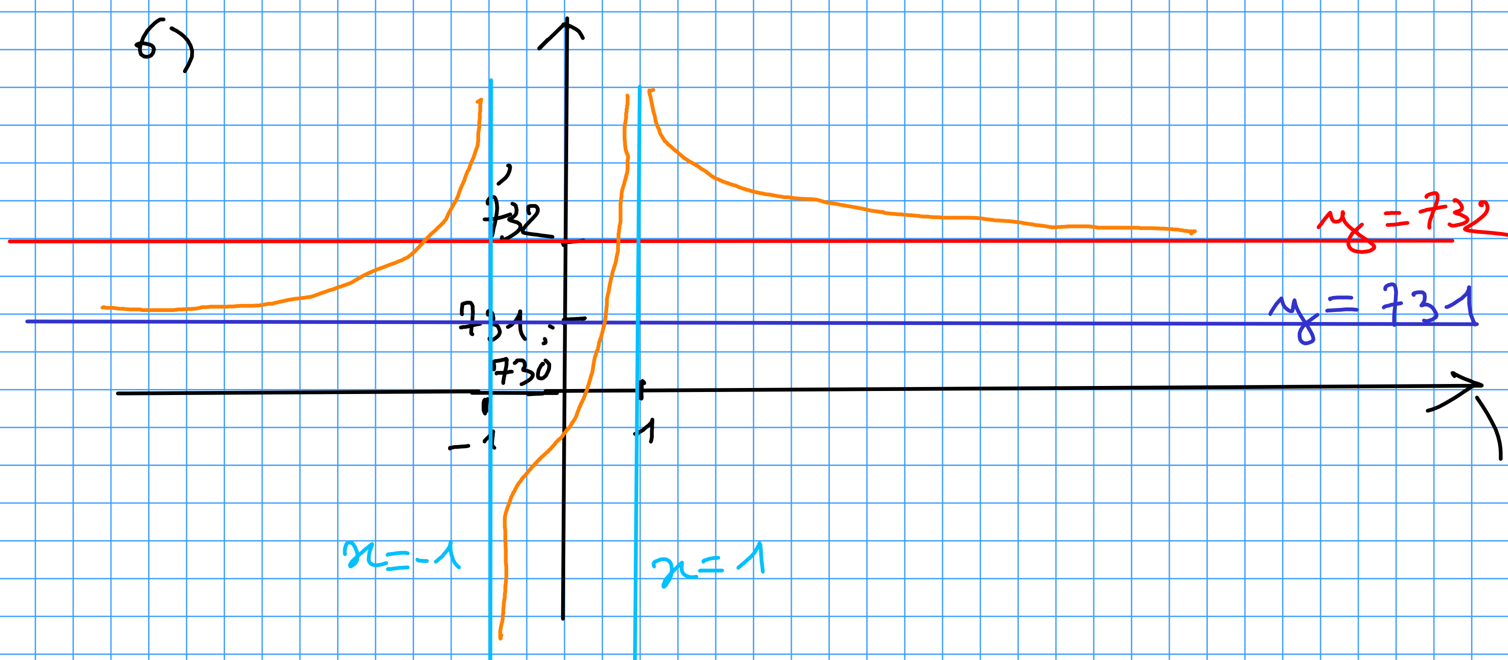
4) On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 731$ donc la droite d'équa-
-tion $y = 731$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 732$ donc la droite d'équation
$y = 732$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

5) On a $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ donc la
droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'é-
-quation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

6)



Capacité 5 ***Lever une forme indéterminée en factorisant le terme prépondérant***

1. Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2x^5 + 3x^4 - x + 1$.
Déterminer la limite de f en 0, puis en $+\infty$ et enfin en $-\infty$

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 + x - 2}$$

a. Déterminer la limite de f en chacune des bornes de son ensemble de définition.

b. Interpréter graphiquement ces limites.

1) • $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$

• Etude en $-\infty$:

• Par somme on a une FI du type $-\infty + +\infty$

• On factorise par le terme prépondérant ~~en~~ ~~$+\infty$~~ qui est x^5

$-2x^5 + 3x^4 - x + 1 = x^5\left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

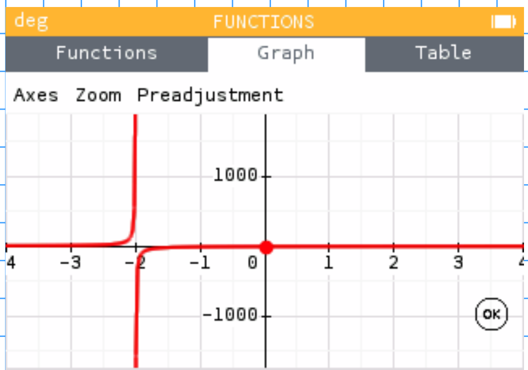
et $\lim\limits_{x \to -\infty} -2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} = -2$

Donc par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

• Etude en $+\infty$:

De même on montre que :

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

2) 

f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2; 1\}$

par : $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 + x - 2}$

Graphiquement on peut conjecturer que $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

et que f possède des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$ (égales à 2 si on zoome)

. Etude en $-\infty$:

Par quotient on a une FI du type $\frac{+\infty}{+\infty}$

On factorise numérateur et dénominateur par leur terme prépondérant en $-\infty$:

$$f(x) = \frac{x^2\left(2 - 8/x + \frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{2 - 8/x + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

Par quotient on a désormais $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$

. Etude en $+\infty$: de même on montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

. Pour l'étude en -2 et en 1 on a besoin d'étudier le signe du trinôme $x^2 + x - 2$:

1 est racine évidente car $1^2 + 1 - 2 = 0$

Le produit des racines est égal à $\frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$

donc l'autre racine est $\frac{-2}{1} = -2$

On en déduit le tableau de signes de x^2+x-2

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x<-2}} 2x^2-8x+6 = 30$

et $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x<-2}} x^2+x-2 = 0^+$

donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x<-2}} \dfrac{2x^2-8x+6}{x^2+x-2} = +\infty$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x>-2}} 2x^2-8x+6 = 30$

et $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x>-2}} x^2+x-2 = 0^-$

donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x>-2}} \dfrac{2x^2-8x+6}{x^2+x-2} = -\infty$

La droite d'équation $x=-2$ est donc asymptote à $\mathcal{C}_f$.

- Pour l'étude en 1, on est bloqué par une FI $\dfrac{0}{0}$.

⚠ Le terme prépondérant en 1 n'est <u>pas</u> le terme de + haut degré

On factorise le numérateur et le dénominateur pour simplifier des facteurs communs (il y en a forcément car les deux s'annulent en 1)

Pour le dénominateur les racines sont -2 et 1 et la forme factorisée $(x+2)(x-1)$

Pour le numérateur, les racines sont 1 et -3 et la forme factorisée

$$2(x-1)(x-3)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$ on a donc :

$$f(x) = \frac{2\cancel{(x-1)}(x-3)}{(x+2)\cancel{(x-1)}} = \frac{2x-6}{x+2}$$

et donc on a $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x-6}{x+2} = -\frac{4}{3}$

Capacité 7 ***Déterminer une limite par composition (voir capacité 6 p.171)***

On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0,5$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus on sait que :

$f(-2) = -3$ et $f(3) = 2$

On donne le tableau de variation d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2\}$, on note $\mathscr{C}_g$ la courbe de g dans un repère du plan.

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-5

1. Calculer $g(f(-2))$ puis déterminer un encadrement de $g\big(f(3)\big)$.

2. a. Que vaut $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} g(x)$? Interpréter graphiquement cette limite.

   b. Tracer dans un repère une représentation possible de la courbe $\mathscr{C}_g$ avec ses droites asymptote(s)qu'on peut déduire du tableau de variation de g et sa tangente au point d'abscisse 1.

3. En justifiant déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) - f(x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) \times f(x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(f(x))$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(f(x))$
- $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} f(g(x))$
- $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} f(g(x))$

1) $g(f(-2)) = g(-3) = 0$

$g(f(3)) = g(2)$

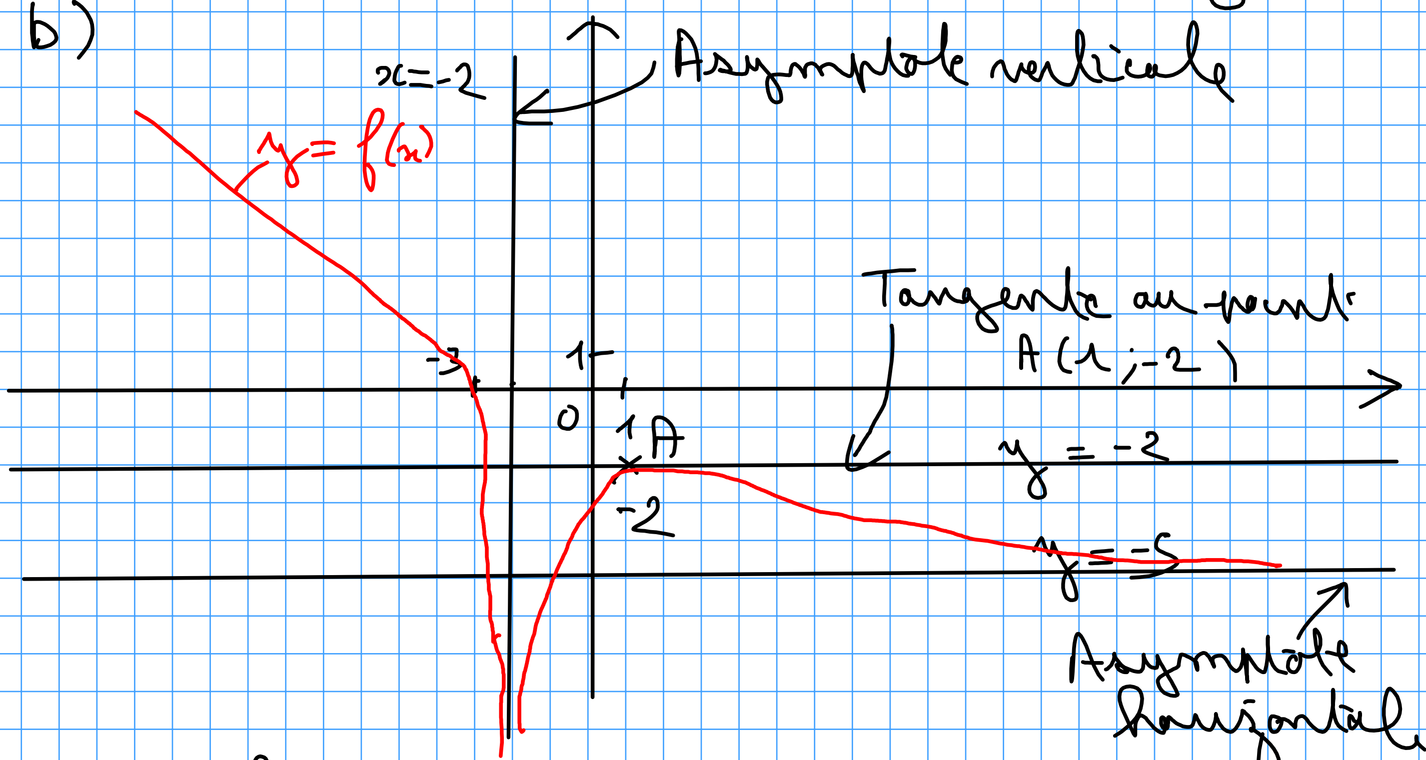
or g décroissante sur $[1;+\infty[$ donc :

$g(1) \geqslant g(2) \geqslant \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

$-2 \geqslant g(2) > -5$

2) a) On a $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} g(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$

b)



3) On a : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} g(x) = -\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0^+$

. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -5$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\Bigg\}$ par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0^-$

. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -f(x) = +\infty$ $\Bigg\}$ par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) - f(x) = +\infty$

. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\Bigg\}$ par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) \times f(x) = -\infty$

. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\underset{+\infty}{x} \longrightarrow \underset{+\infty}{f(x)} \longrightarrow \underset{-5}{g(f(x))}$$

et $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = -5$

donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} g(f(x)) = -5$

. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$\underset{-\infty}{x} \longrightarrow \underset{-\infty}{f(x)} \longrightarrow \underset{+\infty}{g(f(x))}$$

et $\lim\limits_{y \to -\infty} g(y) = +\infty$

donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} g(f(x)) = +\infty$

. On a $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} g(x) = -\infty$

$$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow f(g(x))$$
$$-2^- \qquad -\infty \qquad -\infty$$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

donc par composition $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(g(x)) = -\infty$

. On a $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} g(x) = -\infty$

$$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow f(g(x))$$
$$-2^+ \qquad -\infty \qquad -\infty$$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

donc par composition $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(g(x)) = -\infty$

Exercice supplémentaire

Soient u et v deux fonctions dont on donne les tableaux de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$u(x)$	7 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$v(x)$	4 ↗	$+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3

En justifiant, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} v(u(x))$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} u(v(x))$

Corrigé :

1) . On a $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 7$

. On pose $y = u(x)$ et on a $\lim\limits_{y \to 7} v(y) = +\infty$

. Donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} v(u(x)) = +\infty$

2) . On a $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 3^+$

. On pose $y = v(x)$ et on a $\lim\limits_{y \to 3^+} u(y) = +\infty$

. Donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} u(v(x)) = +\infty$

Capacité 7 ***Utiliser les théorèmes de limite par comparaison ou encadrement, voir exos 66 et 67 p. 74***

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2e^x - x$.

   a. Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

   b. En déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant x$.

   c. Conclure sur la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Soit la fonction g définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + 1$.

   a. Représenter graphiquement la courbe de g avec sa calculatrice et conjecturer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b. En utilisant un encadrement de $\sin(x)$, déterminer un encadrement de $g(x)$ pour tout réel x et en déduire les limites conjecturées.

1) a) Pour tout réel $x \geqslant 0$, on définit :

$$g(x) = f(x) - x = 2e^x - x - x$$

g dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$g'(x) = 2e^x - 2 = 2(e^x - 1)$$

$2 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $e^x - 1$

$$e^x - 1 = 0 \iff e^x = e^0 \iff x = 0$$

$$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$$

x	0		$+\infty$
signe de $e^x - 1$ et de $g'(x)$	0	$+$	
Variations de g	2	$\nearrow$	

On en déduit que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a :

$$g(x) \geqslant 2 > 0$$

donc $f(x) - x > 0$

donc $f(x) > x$

c) . D'une part, pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) > x$

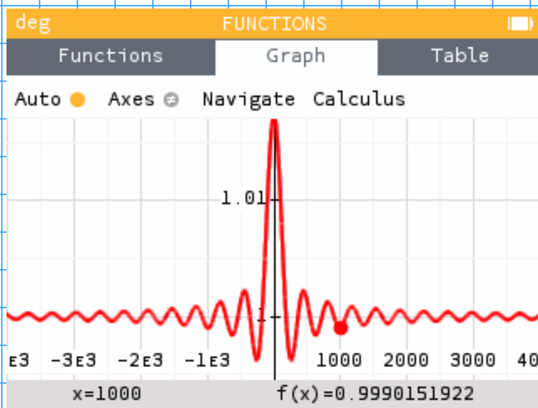
. D'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Donc par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) Soit g la fonction définie sur sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, par :

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{x} + 1$$

a)



On peut conjecturer que la droite d'équation $y=0$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$ et en $+\infty$ et donc que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

b)

. Pour tout réel x on a :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

1er cas $x>0$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

donc $-\frac{1}{x}+1 \geq \frac{\sin(x)}{x}+1 \geq \frac{1}{x}+1$

De plus $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}+1 = 1 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+1 = 1 \end{cases}$

Donc par encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}+1 = 1$$

2ème cas $x<0$

$$-\frac{1}{x} \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{1}{x}$$

$-\frac{1}{x}+1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{1}{x}+1$

De plus $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{x}+1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{x}+1 = 1 \end{cases}$

Donc par encadrement :

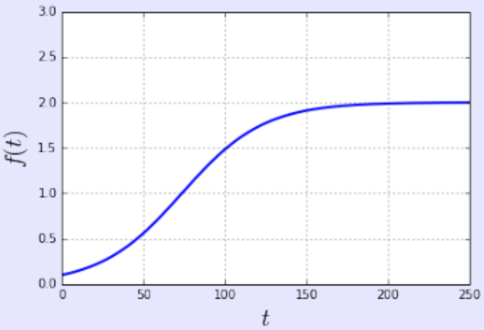
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin(x)}{x}+1$$

Thème 1 ***Modèle d'évolution et modèles définis par une fonction d'une variable***

La croissance d'un plant de mais est modélisée par la fonction f définie par :

$$f \quad : \quad \cancel{[0;250]}\ [0;+\infty[\quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$
$$t \quad \longmapsto \quad \frac{2}{1+19\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

$f(t)$ désigne la hauteur du plant en mètres, t est la variable temps exprimée en jours avec $t \in [0;250]$.
La fonction f est dérivable sur $\cancel{[0;250]}$ $[0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle.
Sur le graphique ci-après, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ de f.



1. Justifier que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f(t) < 2$.
2. Soit t un réel appartenant à l'intervalle $[0;250]$, déterminer $f'(t)$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;250]$.

1) Pour tout réel $t \geqslant 0$, on a :

$$19\,e^{-0,04t} > 0$$

donc $1+19e^{-0,04t} > 1$

donc $\dfrac{1}{1+19e^{-0,04t}} < 1$

donc $\dfrac{2}{1+19e^{-0,04t}} < 2$

On a donc bien, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) < 2$.

2) Soit un réel $t \in [0;+\infty[$

$$f(t) = \frac{2}{1+19e^{-0,04t}}$$

$f = \dfrac{2}{u}$ donc $f' = \dfrac{-2u'}{u^2}$

$u(t) = 1+19e^{-0,04t}$ $\quad u'(t) = -0,04 \times 19e^{-0,04t} = -0,76\,e^{-0,04t}$

donc $f'(t) = \dfrac{1,52\,e^{-0,04t}}{(1+19e^{-0,04t})^2}$

Pour tout réel $t \in [0;250]$, on a : $1,52\,e^{-0,04t} > 0$ et $(1+19e^{-0,04t})^2 > 0$
donc $f'(t) > 0$

On en déduit que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

3. Justifier que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice. Dresser le tableau de variation complet (avec limites aux bornes) de la fonction f.

4. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que seuil(epsilon) renvoie le plus petite entier n tel que $2 - \text{epsilon} < f(n) < 2$ avec epsilon un réel strictement positif (et supérieur à 10^{-15}!).

```
from math import exp #import de la fonction exponentielle
def f(t):
    return 2 / (1 + 19 * exp(-0.04*t))

def seuil(epsilon):
    n = 0
    while 2-f(n) >= epsilon:
        n=n+1
    return n
```

3) Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $f(t) = \dfrac{2}{1+19e^{-0,04t}}$

On a $\lim\limits_{t \to +\infty} -0,04t = -\infty$

et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

donc par composition $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,04t} = 0^+$

donc par quotient $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 2$

On en déduit que la droite d'équation $y=2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$

4) Voir ci-dessus