



c) l'espérance de  $G$  est:

$$E(G) = \sum_{x \in G(\Omega)} x \times P(G=x) = (-2) \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{6} + \dots + 3 \times \frac{1}{6}$$

$$E(G) = \frac{1}{6} \times ((-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3) = \frac{1}{2}$$

On peut interpréter l'espérance comme le gain moyen sur un grand nombre de parties.

Ici  $E(G) > 0$  donc le jeu est favorable au joueur.

2) le joueur mise désormais  $a$  euros

loi de probabilité de  $G$ :

Valeur $k$	$1-a$	$2-a$	$3-a$	$4-a$	$5-a$	$6-a$
Probabilité $P([G=k])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Espérance de  $G$ :

$$E(G) = (1-a + 2-a + 3-a + 4-a + 5-a + 6-a) \times \frac{1}{6}$$

$$E(G) = (1+2+3+4+5+6) \times \frac{1}{6} - a$$

$$E(G) = \frac{6 \times (6+1)}{2} \times \frac{1}{6} - a = \frac{7}{2} - a$$

$$E(G) = 0 \iff \frac{7}{2} - a = 0 \iff \frac{7}{2} = a$$

le jeu est équitable ssi le joueur mise  $\frac{7}{2}$  euros.

 **Capacité 2 Identifier une épreuve de Bernoulli et déterminer son paramètre, voir exo résolu 2 p. 197**

Un joueur mise 2 euros pour participer au jeu suivant :

- On lance deux dés cubiques équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6, et on note les numéros apparaissant sur la face supérieure de chaque dé.
- Le joueur reçoit 4 euros si le produit des numéros apparaissant sur les faces supérieures des deux dés lancés est strictement inférieur à 10, sinon il ne reçoit rien.

On note  $X$  la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (somme reçue moins la mise).

1. a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire  $X$ .  
b.  $X$  suit-elle une loi de Bernoulli? Déterminer la loi de probabilité de  $X$ . Ce jeu est-il équitable?
2. La variable aléatoire  $Y = \frac{X+2}{4}$  suit-elle une loi de Bernoulli?

1) a)  $X$  peut prendre deux valeurs :

$$\bullet 0 - 2 = -2 \text{ ou } 4 - 2 = 2$$

b)  $X$  ne prend pas les valeurs 0 et 1 donc ne suit pas une loi de Bernoulli.

$P(X=2)$  est la probabilité que le produit des faces supérieures des deux dés soit inférieur à 10.

$D_2^1 \backslash D_2^2$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

: L'expérience aléatoire du lancer de 2 dé compte  $6 \times 6 = 36$  issues élémentaires qui sont les couples (face de 1, face de 2)

$$P(X=2) = \frac{17}{36}$$

$E(X=0)$  donc le jeu est équitable

Loi de probabilité de X

k	-2	2
$P(X=k)$	$\frac{19}{36}$	$\frac{17}{36}$

2)  $Y = \frac{X+2}{4}$  peut prendre deux valeurs:

$$\frac{-2+2}{4} = 0 \text{ et } \frac{2+2}{4} = 1$$

$$P(Y=1) = P(X=2) = \frac{17}{36}$$

Donc Y suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{17}{36}$ .

## Algorithmique 1 Simuler une variable aléatoire de Bernoulli

On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle « succès » l'apparition de la face 6.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la face est 6 et la valeur 0

1.  $X$  suit-elle une loi de Bernoulli? Si oui, déterminer son paramètre.
2. On rappelle que `randint(a, b)` est un entier choisi aléatoirement entre deux entiers  $a$  et  $b$  compris. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire  $X$ :

```
from random import randint

def simulX():
    if .....:
        return .....
    else:
        return .....
```

3. De quelle valeur devraient se rapprocher `mystere(1000)`, `mystere(10000)` et `mystere(100000)`? Justifier.

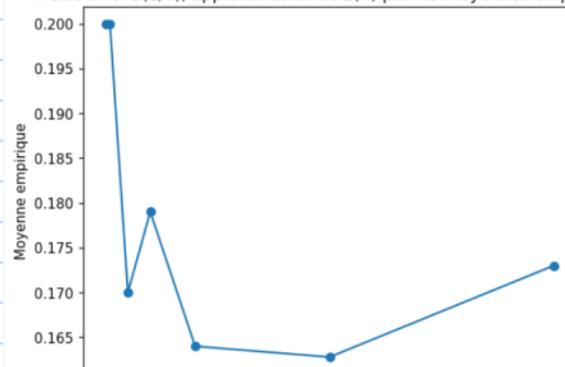
```
from random import randint

def mystere(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + simulX()
    return s / n
```

```
1 # Exemples du cours Loi Binomiale
2
3 # Algorithmique 1
4 from random import randint
5
6 def simulX():
7     if randint(1, 6) == 6:
8         return 1
9     else:
10        return 0
11
12 def mystere(n):
13     """Approximation de l'espérance de X
14     par la moyenne empirique (loi faible des grands nombres)
15     """
16     s = 0
17     for k in range(n):
18         s = s + simulX()
19     return s / n
20
```

$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$  donc les moyennes empiriques sur un échantillon de réalisations indépendantes tendent vers  $\frac{1}{6}$ .

X suit la loi  $B(1/6)$ , approximation de  $E(X)$  par les moyennes empiriques



### Capacité 2 Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, déterminer si elle peut être modélisée par un schéma de Bernoulli et si oui, préciser ses paramètres.

1. On lance dix fois une pièce équilibrée et on compte le nombre de « Face » obtenues.
2. On lance deux fois un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on compte le nombre de faces paires obtenues.
3. On tire trois fois et avec remise une boule dans une urne contenant 10 noires et 7 boules rouges et on note le nombre de boules rouges obtenues.
4. On tire trois fois et sans remise une boule dans une urne contenant 10 noires et 7 boules rouges et on note le nombre de boules rouges obtenues.
5. Un opérateur de télémarketing appelle 200 clients dans la journée. La probabilité qu'un client accepte l'offre commerciale est de 0,15. Le chef de l'opérateur note le nombre de clients qui ont accepté l'offre.

1) schéma de Bernoulli de paramètres  $m = 10$   
et  $p = \frac{1}{2}$

2) schéma de Bernoulli de paramètres  $m = 2$   
et  $p = \frac{1}{2}$

3) schéma de Bernoulli de paramètres  $m = 3$   
et  $p = \frac{7}{17}$

4) Tirages sans remise donc ce n'est pas un schéma de Bernoulli.

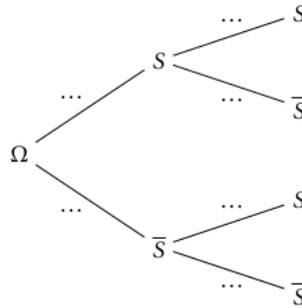
5) schéma de Bernoulli de paramètres  $m = 200$   
et  $p = 0,15$ .

#### Capacité 4 Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli

On considère l'épreuve de Bernoulli  $E$  de paramètre  $p = \frac{1}{6}$  qui consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et à compter comme *succès* l'obtention d'un 6.

1. On répète 2 fois l'expérience aléatoire  $E$  de façon indépendante.

a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous. On a noté  $S$  un succès et  $\bar{S}$  un échec.



b. Soit la variable aléatoire  $X_2$  qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 2$  et  $p = \frac{1}{6}$ .

- Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire  $X_2$ ?
- Déterminer sa loi de probabilité et son espérance.

2. On répète 3 fois l'expérience aléatoire  $E$  de façon indépendante.

a. Représenter ce schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 3$  et  $p = \frac{1}{6}$  par un arbre pondéré en notant  $S$  un succès et  $\bar{S}$  un échec.

b. Soit la variable aléatoire  $X_3$  qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 2$  et  $p = \frac{1}{6}$ .

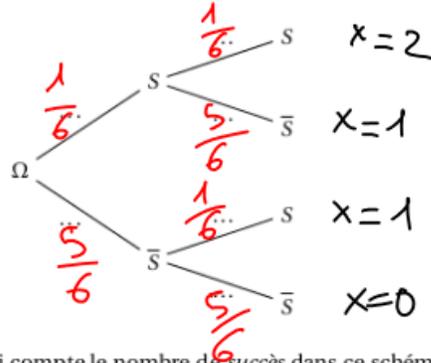
- Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire  $X_3$ ?
- Déterminer les probabilités  $\mathbb{P}(X_3 = 3)$  et  $\mathbb{P}(X_3 = 0)$ .
- Combien de chemins dans l'arbre réalisent 2 succès? Exprimer ce nombre à l'aide d'un coefficient binomial et en déduire une formule de calcul de  $\mathbb{P}(X_3 = 2)$ .
- Exprimer de même  $\mathbb{P}(X_3 = 1)$ .
- Dresser un tableau de la loi de probabilité de  $X_3$  et déterminer son espérance.

3. On répète  $n$  fois (avec  $n \geq 1$ ) l'expérience aléatoire  $E$  de façon indépendante. Soit la variable aléatoire  $X_n$  qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p = \frac{1}{6}$ .

On considère l'épreuve de Bernoulli  $E$  de paramètre  $p = \frac{1}{6}$  qui consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et à compter comme *succès* l'obtention d'un 6.

1. On répète 2 fois l'expérience aléatoire  $E$  de façon indépendante.

a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous. On a noté  $S$  un succès et  $\bar{S}$  un échec.



b. Soit la variable aléatoire  $X_2$  qui compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 2$  et  $p = \frac{1}{6}$ .

c. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire  $X_2$ ?

d. Déterminer sa loi de probabilité et son espérance.

1) c)  $X_2$  prend les valeurs 0, 1 ou 2.

2) loi de probabilité de  $X_2$ :

$k$	0	1	2
$P(X_2=k)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$2 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$

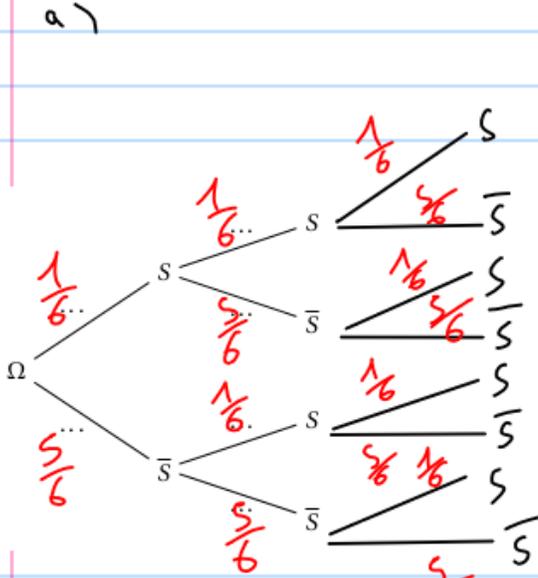
$$\text{Espérance de } X : E(X) = 0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1 \times 2 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$E(X) = 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times (5+1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Sur un échantillon de grande taille de réalisations indépendantes de  $X$ , la moyenne empirique de  $X$  doit être proche de  $E(X) = \frac{1}{3}$ . C'est la loi faible des grands nombres.

2. On répète 3 fois l'expérience aléatoire  $E$  de façon indépendante.

- Représenter ce schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 3$  et  $p = \frac{1}{6}$  par un arbre pondéré en notant  $S$  un succès et  $\bar{S}$  un échec.
- Soit la variable aléatoire  $X_3$  qui compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 2$  et  $p = \frac{1}{6}$ .
- Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire  $X_3$ ?
- Déterminer les probabilités  $\mathbb{P}(X_3 = 3)$  et  $\mathbb{P}(X_3 = 0)$ .
- Combien de chemins dans l'arbre réalise 2 succès? Exprimer ce nombre à l'aide d'un coefficient binomial et en déduire une formule de calcul de  $\mathbb{P}(X_3 = 2)$ .
- Exprimer de même  $\mathbb{P}(X_3 = 1)$ .
- Dresser un tableau de la loi de probabilité de  $X_3$  et déterminer son espérance.



b) On a une répétition de  $n=3$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre  $p = \frac{1}{6}$ . C'est un schéma  $\bar{6}$  de Bernoulli de paramètres  $n=3$  et  $p = \frac{1}{6}$ .

$X_3$ , qui compte le nombre de succès dans ce schéma, suit une loi binomiale de paramètres  $n=3$  et  $p = \frac{1}{6}$ .

c)  $X_3$  prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

$$d) P(X_3=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P(X_3=1) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

e) Le nombre de chemins réalisant 2 succès parmi 3 épreuves est le nombre de combinaisons de 2 éléments pris parmi 3, c'est-à-dire.

$$\binom{3}{2} = 3$$

Chaque chemin réalisant 2 succès a une probabilité de  $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$  donc:

$$P(X_3=2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$$

nombre de chemins

probabilité d'un chemin

$$\text{donc } P(X_3=2) = 3 \times \frac{1}{6^2} \times \frac{5}{6} = 3 \times \frac{5}{6^3} = \frac{5}{72}$$

f) De même on a:

$$P(X_3=1) = \binom{3}{1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \times \frac{5^2}{6^3} = \frac{5^2}{72} = \frac{25}{72}$$

g) k	0	1	2	3
$P(X_3=k)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$	$3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$

On vérifie que:  
 $P(X_3=0) + P(X_3=1) + P(X_3=2) + P(X_3=3) = 1$

$$\text{On vérifie que } E(X_3) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

me An.

```
from random import randint

def simulX(n):
    nbsucces = 0
    for k in range(n):
        if randint(1, 6) == 6:
            nbsucces = nbsucces + 1
    return nbsucces
```

## Question 4

```
from random import random
from math import floor

def bernoulli_truque(p):
    return floor(p + random())

def simulY(n, p):
    nbsucces = 0
    for k in range(n):
        nbsucces = nbsucces + bernoulli_truque(p)
    return nbsucces
```

$$\text{On a } 0 \leq \text{random}() < 1 \\ \Leftrightarrow p \leq p + \text{random}() < 1 + p$$

$$\text{floor}(p + \text{random}()) = 0 \text{ ssi } p \leq p + \text{random}() < 1 \\ \text{ssi } 0 \leq \text{random}() < 1 - p$$

Or  $\text{random}$  suit une loi uniforme sur  $[0; 1[$

$$\text{donc } P(0 \leq \text{random}() < 1 - p) = 1 - p$$

$$\text{et donc } P(\text{floor}(\text{random}() + p) = 0) = 1 - p$$

$$\text{et } P(\text{floor}(\text{random}() + p) = 1) = 1 - (1 - p) = p$$

**Capacité 5 Calculer un coefficient binomial, voir exo résolu 7 p.199**

Un championnat est constitué de 38 matchs. Lors d'un match, deux issues sont possibles : la victoire ou la défaite. On peut modéliser cette situation par un schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 38$  et  $p = \frac{1}{2}$ . On considère l'arbre représentant ce schéma.



**Chapitre lois discrètes**

**MathsComp**

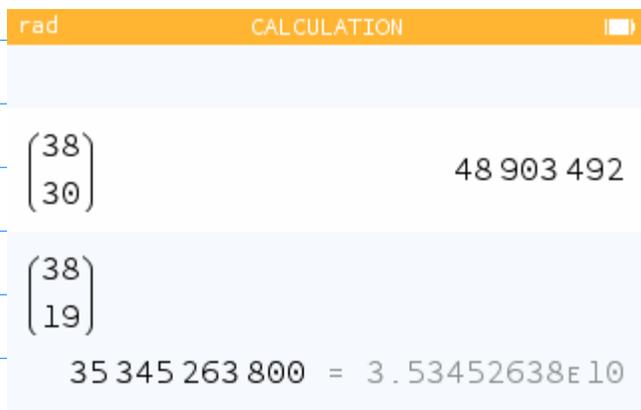
1. Interpréter et calculer les coefficients binomiaux  $\binom{38}{38}$ ,  $\binom{38}{0}$ ,  $\binom{38}{1}$  et  $\binom{38}{37}$ .
2. Avec la calculatrice, déterminer le nombre de chemins réalisant 30 succès.
3. Déterminer le nombre de façons de perdre 8 matchs sur 38.
4. Déterminer le nombre de façons de gagner la moitié des matchs disputés.

1)  $\binom{38}{38} = 1$      $\binom{38}{0} = 1$      $\binom{38}{1} = 38$   
 $\binom{38}{37} = 38$

2)  $\binom{38}{30} = 48\ 903\ 492$

3)  $\binom{38}{8} = \binom{38}{30}$

4)  $\binom{38}{19} = 35\ 345\ 263\ 800$



## Capacité 6 Reconnaître un schéma de Bernoulli et une loi binomiale

Déterminer dans chaque cas si on peut modéliser la situation par un schéma de Bernoulli et une loi binomiale et si oui déterminer leurs paramètres.

- Situation 1** On s'intéresse à la variable aléatoire  $V$  qui compte le nombre d'ampoules avec défaut dans un échantillon de 10 ampoules choisies au hasard parmi la production d'une journée à la sortie d'une machine dont la probabilité de fabrication d'une ampoule sans défaut est égale à 0,9305. La taille du stock permet d'assimiler ce prélèvement à des tirages avec remise.
- Situation 2** On s'intéresse à la variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre de boules rouges obtenues lorsqu'on tire simultanément trois boules dans une urne contenant 60 boules rouges et 40 boules blanches.
- Situation 3** On s'intéresse à la variable aléatoire  $Y$  qui compte le nombre de boules rouges obtenues lorsqu'on tire successivement avec remise trois boules dans une urne contenant 60 boules rouges et 40 boules blanches.
- Situation 4** On s'intéresse à la variable aléatoire  $Z$  qui compte le nombre de boules rouges obtenues lorsqu'on tire successivement sans remise trois boules dans une urne contenant 60 boules rouges et 40 boules blanches.

1) Situation 1:

On a une répétition de  $n=10$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (tirage avec remise) dont la probabilité de succès est :

$$p = 1 - 0,9305 = 0,0695$$

$V$  suit donc une loi binomiale de paramètres :  
 $n=10$  et  $p=0,0695$

2) Situation 2 : tirage simultané équivalent à tirage sans remise donc on ne peut pas se ramener à une répétition d'expériences identiques et indépendantes.  
Ce n'est pas un schéma de Bernoulli et  $X$  ne suit pas une loi binomiale.

3) Situation 3:

Gm a une répétition  $n = 3$  épreuves de Bernoulli -  
li identiques et indépendantes (tirage avec  
remise) dont la probabilité de succès est :  
$$p = \frac{60}{100} = 0,6$$

4) Situation 4: les tirages étant sans remise  
les épreuves successives ne sont ni indépendan-  
tes ni identiques. Gm n'a pas de schéma de  
Bernoulli et  $Z$  ne suit pas une loi  
binomiale.

### **Capacité 7 Calculer des probabilités pour une loi binomiale**

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = 0,3$ .

Calculer des valeurs approchées des probabilités ci-dessous, avec les fonctions préprogrammées de la calculatrice.

1.  $\mathbb{P}(X = 3)$

3.  $\mathbb{P}(X \leq 4)$

5.  $\mathbb{P}(4 \leq X \leq 8)$

2.  $\mathbb{P}(X \leq 3)$

4.  $\mathbb{P}(X \geq 4)$

6.  $\mathbb{P}((X \leq 4) \cup (8 \leq X))$

```
>>> binompdf(10, 0.3, 3)
0.2668279319999998
>>> binomcdf(10, 0.3, 3)
0.6496107183999996
```

```
>>> binomcdf(10, 0.3, 4)
0.8497316673999995
>>> 1 - binomcdf(10, 0.3, 3)
0.3503892816000004
>>> binomcdf(10, 0.3, 8) - binomcdf(10, 0.3, 3)
0.3502455956999997
```

```
>>> binomcdf(10, 0.3, 4) + 1 - binomcdf(10, 0.3, 7)
0.8513220538000001
>>>
```

### **Capacité 8 Modéliser une situation par une loi binomiale**

Un concours d'entrée en école d'ingénieurs consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose cinq réponses possibles, dont une seule est correcte. À chaque question, le candidat ou la candidate doit nécessairement choisir une seule réponse. Cette personne gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si sa réponse est fausse.

On considère trois candidats :



## Chapitre lois discrètes

MathsComp

- Xavier n'a pas révisé et répond complètement au hasard à toutes les questions. Pour chaque question, la probabilité qu'il réponde correctement est donc de  $\frac{1}{5}$ .
- Ysoline est mieux préparée. On considère que pour chacune des vingt questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de  $\frac{2}{5}$ ;
- Zéphyr prépare ce concours depuis le début de l'année : pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est de  $\frac{3}{5}$ .

1. On note  $A$ ,  $B$  et  $C$  les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Xavier, Ysoline et Zéphyr.

- a. On admet que la variable aléatoire  $A$  suit une loi binomiale. Quels sont ses paramètres?
- b. Expliquer la démarche pour déterminer un arrondi au millième de la probabilité  $\mathbb{P}(A \geq 10)$  avec la calculatrice.

Dans la suite, on admettra que  $\mathbb{P}(A \geq 10) \approx 0,003$  et  $\mathbb{P}(B \geq 10) \approx 0,245$  et  $\mathbb{P}(C \geq 10) \approx 0,872$ .

1. On note  $A$ ,  $B$  et  $C$  les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Xavier, Ysoline et Zéphyr.



## Corrigé du DS n°7 Sujet B

734

- a. La série de 20 réponses données par Xavier est une répétition de  $n = 20$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont la probabilité de succès (bonne réponse) est  $p = \frac{1}{5}$ . La variable aléatoire  $A$  donnant le nombre de bonnes réponses données par Arnaud suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 20$  et  $p = \frac{1}{5}$ .
- b. À l'aide de la calculatrice, on peut calculer  $\mathbb{P}(A \leq 9) \approx 0,997$  et on en déduit la probabilité de l'événement contraire  $\mathbb{P}(A \geq 10) = 1 - \mathbb{P}(A \leq 9) \approx 0,003$ .

Dans la suite, on admettra que  $\mathbb{P}(A \geq 10) \approx 0,003$  et  $\mathbb{P}(B \geq 10) \approx 0,245$  et  $\mathbb{P}(C \geq 10) \approx 0,872$ .

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats. On note  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  et  $M$  les évènements :

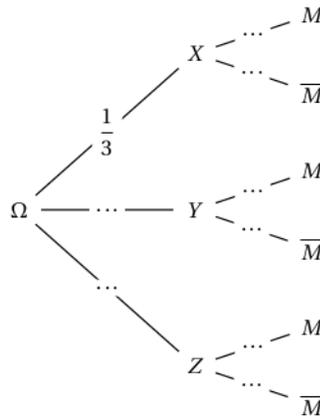
- $X$  : « la copie choisie est celle de Xavier » ;
- $Z$  : « la copie choisie est celle de Zéphyr » ;
- $Y$  : « la copie choisie est celle d'Ysoline » ;
- $M$  : « la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 ».

a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant cette situation.

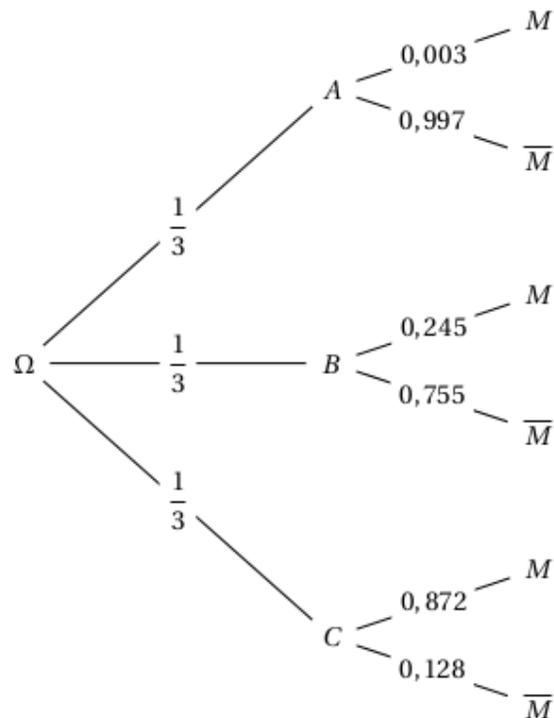
b. Démontrer que  $\mathbb{P}(M) \approx 0,373$ .

c. On constate, après l'avoir corrigée, que la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.

Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la copie d'Ysoline ? Donner l'arrondi au millième.



2. a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant cette situation.



- b.  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(X \cap M) + \mathbb{P}(Y \cap M) + \mathbb{P}(Z \cap M)$$

On applique trois fois la formule des probabilités composées / conditionnelles

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}_X(M) + \mathbb{P}(Y) \times \mathbb{P}_Y(M) + \mathbb{P}(Z) \times \mathbb{P}_Z(M)$$

$$\mathbb{P}(M) \approx \frac{1}{3} \times 0,003 + \frac{1}{3} \times 0,245 + \frac{1}{3} \times 0,872$$

$$\mathbb{P}(M) \approx \boxed{0,373}$$

- c. On constate, après l'avoir corrigée, que la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.

La probabilité qu'il s'agisse de la copie d'Ysoline est la probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}_M(Y)$  qu'on calcule avec la formule des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}_M(Y) = \frac{\mathbb{P}(Y \cap M)}{\mathbb{P}(M)} \approx \frac{\frac{1}{3} \times 0,245}{0,373} \approx \boxed{0,219}$$

### Capacité 9 Utiliser l'espérance d'une loi binomiale

Sur une ligne aérienne, une compagnie affrète un appareil de 200 places et vend 202 réservations par vol. On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi binomiale de paramètres  $n = 202$  et  $p = 0,971$ .

1. Déterminer le nombre moyen de passagers par vol.
2. Calculer la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement.
3. Calculer la probabilité qu'un seul client parmi les 202 qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement.
4. En déduire la probabilité que la compagnie se trouve en situation de surréservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).

$$1) E(X) = n \times p = 202 \times 0,971 = 196,142$$

$$2) P(X = 202) = p^{202} = 0,971^{202} \approx 0,0262 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

$$3) P(X = 201) = \binom{202}{1} p^{201} \times (1-p)$$

$$P(X = 201) = 202 \times 0,971^{201} \times 0,029 \approx 0,0158 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

4) La probabilité de surréservation est

$$P(X = 202) + P(X = 201) \approx 0,0420 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

### Algorithmique 3

On note  $Y$  la variable aléatoire qui renvoie le rang du premier 6 lorsqu'on lance un dé équilibré à 6 faces jusqu'à l'obtention d'un 6.

1. Calculer les probabilités  $\mathbb{P}(Y = 1)$ ,  $\mathbb{P}(Y = 2)$  et  $\mathbb{P}(Y = 3)$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul, exprimer  $\mathbb{P}(Y = n)$ .
3. Quelles sont les valeurs possibles pour  $Y$ ?
4. Compléter la fonction Python `premier6()` pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire  $Y$ .



```
from random import randint

def de():
    return randint(1, 6)

def premier6():
    n = 1
    while de() != 6:
        n = n + 1
    return n
```

$$1) \mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(Y=2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

$$\mathbb{P}(Y=3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

2) Pour tout entier  $n \geq 1$ :

$$\mathbb{P}(Y=n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$$

3)  $Y$  peut prendre toute valeur entière non nulle.

**Capacité 10 Utiliser une loi géométrique, voir exo 16 p. 203**

1. Quel est le nombre moyen de lancers pour obtenir un premier 6, lors d'une répétition d'expériences indépendantes de lancers d'un dé équilibré à 6 faces?
2. Dans chaque cas,  $Y$  désigne une variable aléatoire, suivant une loi géométrique de paramètre  $p$ .
  - a. Déterminer  $p$  si  $\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2}$ .
  - b. Déterminer  $p$  si  $\mathbb{P}(Y > 2) = 0,49$ .

1) Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le rang du premier 6 lors d'une série de lancers successifs d'un dé équilibré à 6 faces.

$X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p = \frac{1}{6}$  donc  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

2)  $Y$  suit une loi géométrique de paramètre  $p > 0$ .

$$a) \quad \mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{p} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$$

$$b) \quad \mathbb{P}(Y > 2) = 0,49 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y \leq 2) = 0,51$$

$$\mathbb{P}(Y > 2) = 0,49 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=2) = 0,51$$

$$\Leftrightarrow p + (1-p)p = 0,51$$

$$\Leftrightarrow p(2-p) = 0,51$$

$$\mathbb{P}(Y > 2) = 0,49 \Leftrightarrow p^2 - 2p + 0,51 = 0 \quad (E)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 0,51 = 1,96$$
$$\Delta = 1,4^2$$

$\Delta > 0$  donc l'équation (E) a 2 solutions distinctes.

$$p_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 1,4}{2} = 0,3$$

$$p_2 = \frac{2 + 1,4}{2} = 1,7$$

Mais  $p$  est une probabilité strictement positive donc  $0 < p \leq 1$

et donc  $p_1 = 0,3$  est l'unique solution

**84**

L'OCDE estime qu'en France environ 49 % de la population de 65 ans et plus est vaccinée contre la grippe.

On tire au hasard 200 personnes dans le listing des titulaires d'une carte de réduction réservée aux personnes de 65 ans et plus.

$X$  est la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes vaccinées contre la grippe parmi ces 200 personnes.

**a)** Déterminer la loi de probabilité suivie par  $X$ .

**b)** Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soient vaccinées contre la grippe. *Arrondir au centième.*

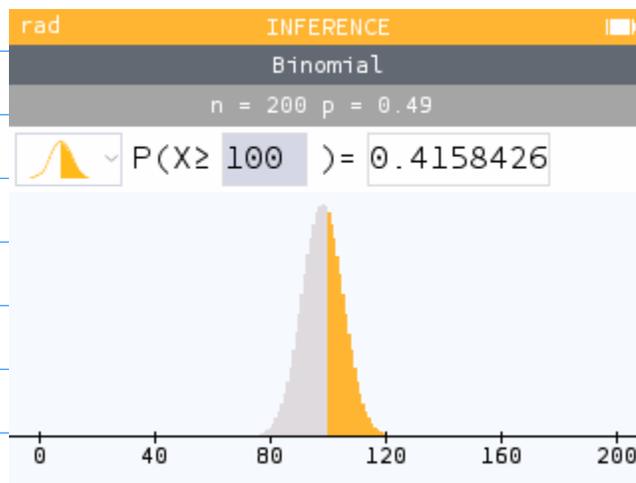
**c)** Déterminer la probabilité que 90 personnes au plus soient vaccinées contre la grippe. *Arrondir au centième.*

**d)** À l'aide de la calculatrice, déterminer la plus grande valeur de  $k$  telle que  $P(X \geq k) \geq 0,95$ .

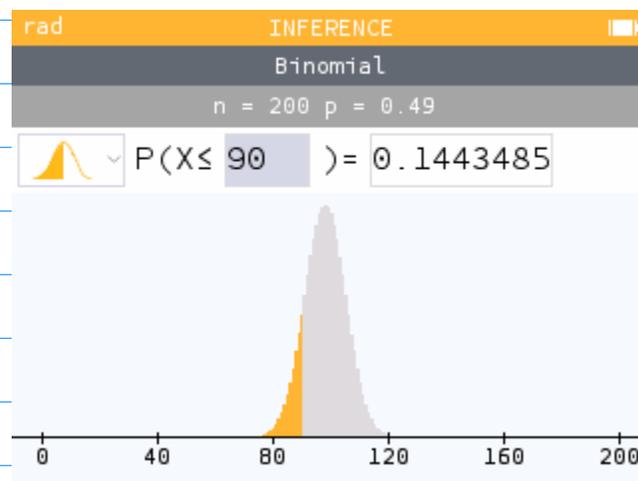
Interpréter cette valeur.

a) On a une répétition de  $n=200$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, dont la probabilité de succès est  $p=0,49$ .  
La variable aléatoire  $X$  donnant le nombre de personnes vaccinées suit donc une loi binomiale de paramètres  $n=200$  et  $p=0,49$ .

b)  $P(X \geq 100) \approx 0,416$  à  $10^{-3}$  près

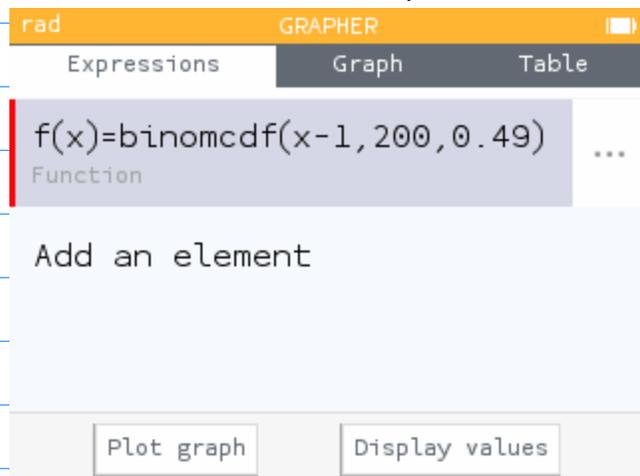


c)  $P(X \leq 90) \approx 0,144$  à  $10^{-3}$  près



d)  $P(X \geq k) \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq k-1) \geq 0,95$   
 $\Leftrightarrow 0,05 \geq P(X \leq k-1)$

On fait un tableau de valeurs de  $P(X \leq k-1)$  avec la calculatrice



Par balayage, on détermine le plus grand entier tel que  $P(X \leq k-1) \leq 0,95$  et on trouve que c'est 86

The screenshot shows a calculator interface with the following elements:

- Top bar: rad, GRAPHER, and a battery icon.
- Navigation tabs: Expressions, Graph, and Table.
- Text: Set the interval
- Table of values:

83	0.01398173
84	0.01992445
85	0.02787722
86	0.03830478
87	0.05170181
88	0.06856811
89	0.08937664
90	0.1145358
91	0.1442485

86 est donc le plus grand entier tel que  $P(X \geq k) \geq 0,95$ , c'est-à-dire qu'on a une probabilité supérieure ou égale à 0,95 d'avoir au moins 86 personnes vaccinées dans l'échantillon de taille 200, mais que la probabilité d'avoir au moins 87 personnes vaccinées est inférieure à 0,95.

## Capacité 11

**92 Algo** La durée de vie, en année, d'un élément radioactif peut être modélisée par une variable aléatoire  $T$  qui suit la loi géométrique de paramètre  $p = 0,0005$ .

Le succès est alors l'événement : « L'élément n'émet plus de rayonnement ».

$T$  compte le nombre d'années nécessaires pour arriver au succès. *Arrondir les résultats au millième.*

**a)** Calculer :

- $P(T > 3\,000)$
- $P(T \leq 5\,000)$
- $P(1\,500 < T \leq 2\,500)$

Interpréter les résultats obtenus.

**b)** Calculer la probabilité que cet élément ne soit pas désintégré au bout de 2 000 ans sachant qu'il n'a pas été désintégré au bout de 1 000 ans.

**c)** La demi-vie d'un élément radioactif est le temps au bout duquel cet élément a une chance sur deux de ne plus émettre de rayonnement.

À l'aide d'un algorithme, déterminer la durée de demi-vie de cet élément.

a)

$$\bullet P(T > 3000) = (1-p)^{3000} = (1-0,0005)^{3000}$$

$$P(T > 3000) = 0,9995^{3000} \approx 0,223$$

$$\bullet P(T \leq 5000) = 1 - P(T > 5000)$$

$$P(T \leq 5000) = 1 - (1-p)^{5000}$$

$$P(T \leq 5000) = 1 - 0,9995^{5000} \approx 0,918$$

$$\bullet P(1500 < T \leq 2500) = P(T \leq 2500) - P(T \leq 1500)$$

$$P(1500 < T \leq 2500) = 1 - P(T > 2500) - (1 - P(T > 1500))$$

$$P(1500 < T \leq 2500) = P(T > 1500) - P(T > 2500)$$

$$P(1500 < T \leq 2500) = (1-p)^{1500} - (1-p)^{2500}$$

$$P(1500 < T \leq 2500) = 0,9995^{1500} - 0,9995^{2500} \approx 0,186$$

b) On doit calculer:

$$P_{(T > 1000)}(T > 2000)$$

D'après la propriété de loi sans mémoire:

$$P_{(T > 1000)}(T > 2000) = P(T > 2000 - 1000) = P(T > 1000)$$

$$\text{On } P(T > 1000) = (1-p)^{1000} = 0,9995^{1000}$$

$$P(T > 1000) \approx 0,6065$$

e) On doit calculer la plus petite année  $k$ , telle que :

$$P(T \leq k) \geq 0,5 \Leftrightarrow P(T > k) \leq 0,5$$

$$\Leftrightarrow (1-p)^k \leq 0,5$$

Algorithme de seuil en Python

```
def demi_vie(p):
```

```
    k = 0
```

```
    while (1-p)**k > 0.5:
```

```
        k = k + 1
```

```
    return k
```

```
In [4]:
```

```
1 def demi_vie(p):
2     k = 0
3     while (1-p)**k > 0.5:
4         k = k + 1
5     return k
```

```
In [5]:
```

```
1 demi_vie(0.0005)
```

```
Out[5]: 1386
```