Corrigé des exemples du cours convexité

Capacité 7 ***Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction***

1. Par lecture graphique de leur courbe (représentée si besoin avec la calculatrice), conjecturer la convexité des fonctions suivantes :

   a. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

   b. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x^2$.

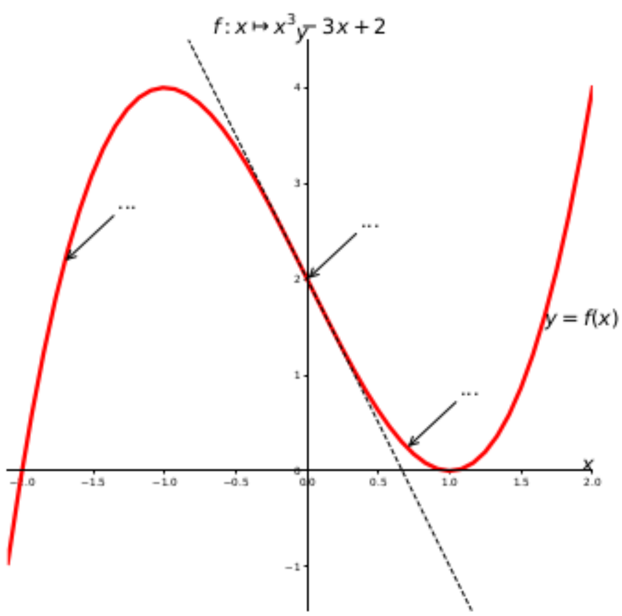
   c. h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x}$.

   d. m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = \mathrm{e}^x$.

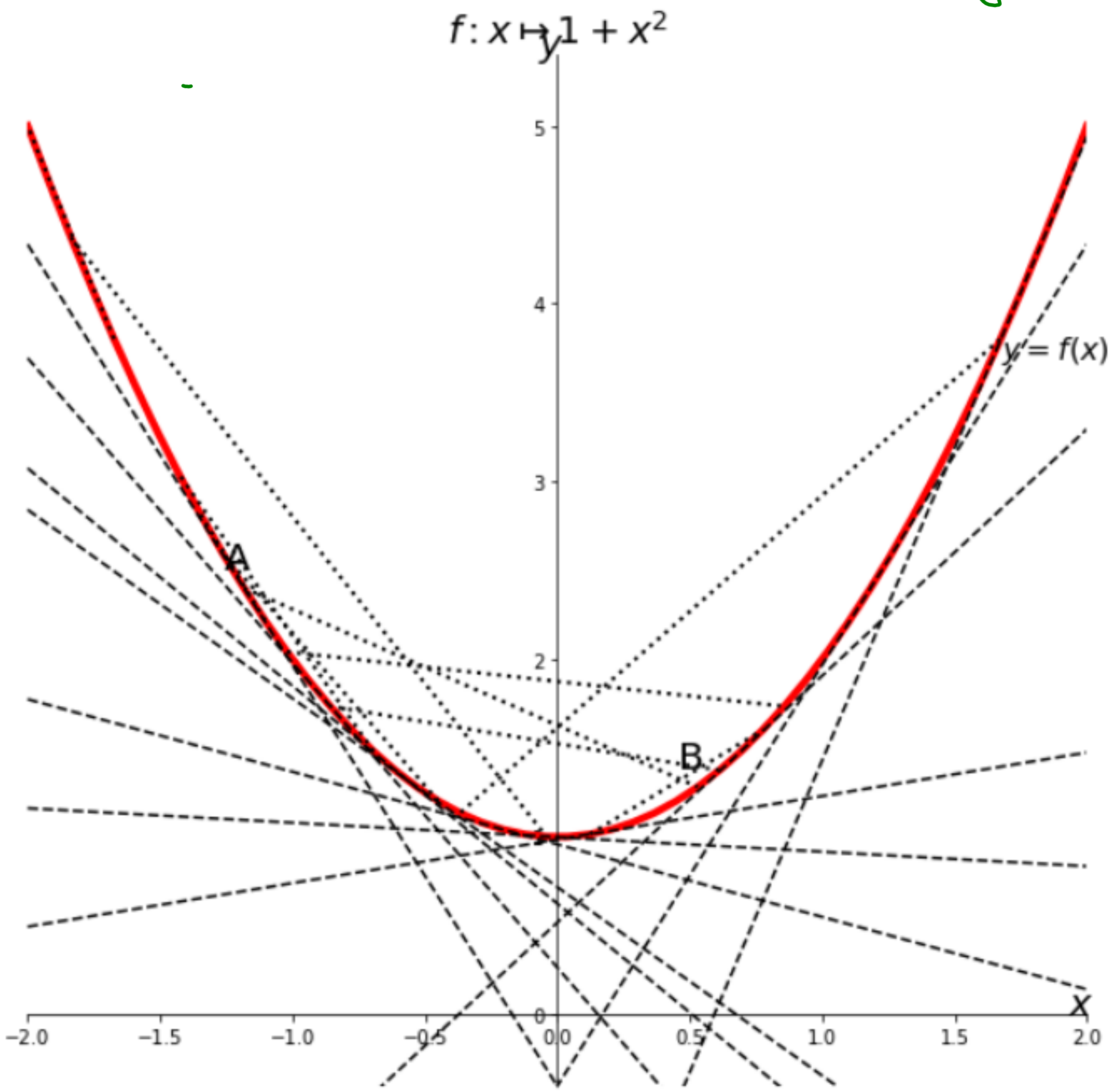
   e. c définie sur $\mathbb{R}$ par $r(x) = x^3$.

2. Si f est une fonction convexe sur un intervalle I, que peut-on dire de la fonction $-f$?

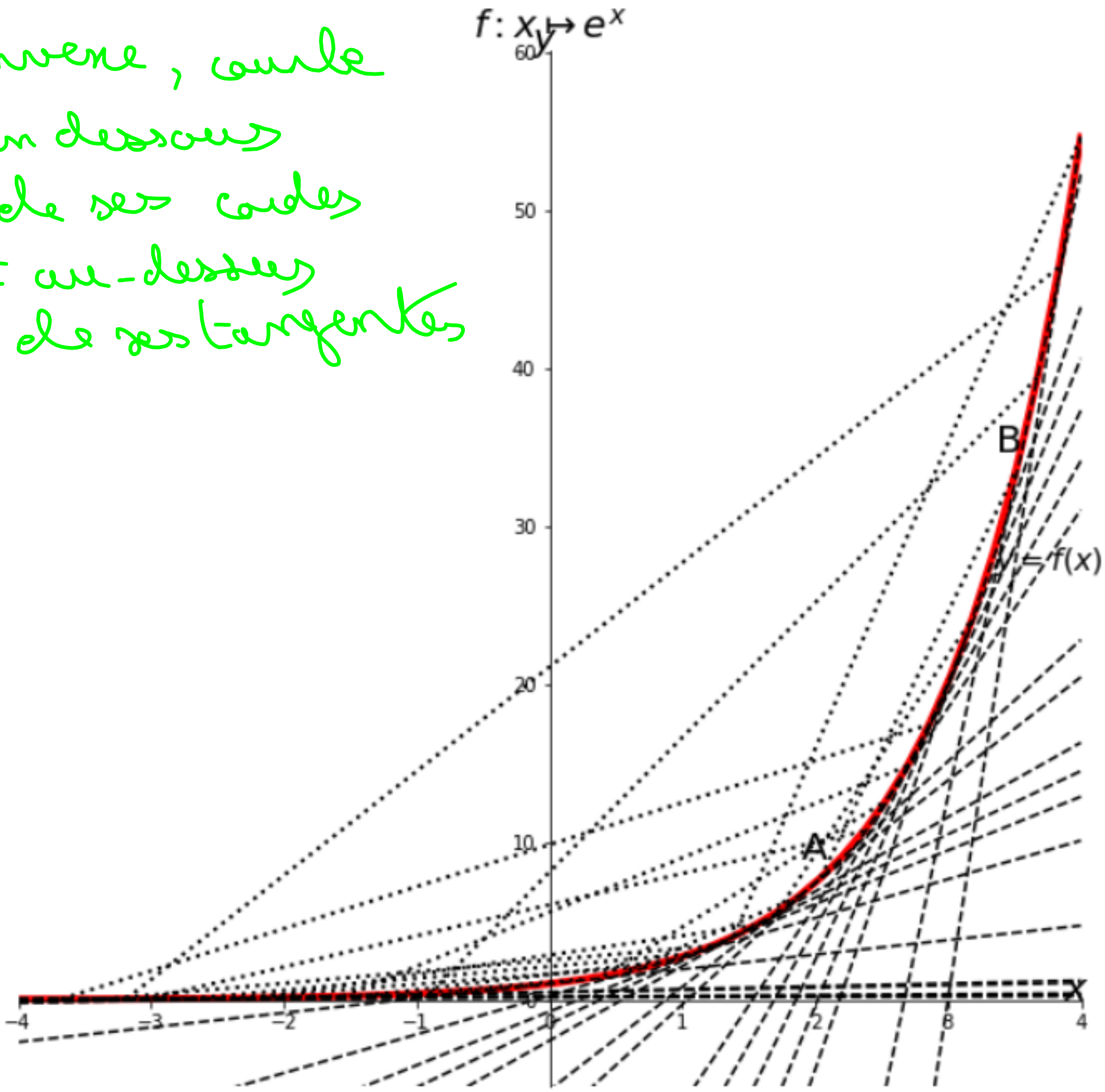
3. On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ et sa tangente au point d'abscisse 0. Compléter le graphique ci-dessous en indiquant convexité et point d'inflexion.



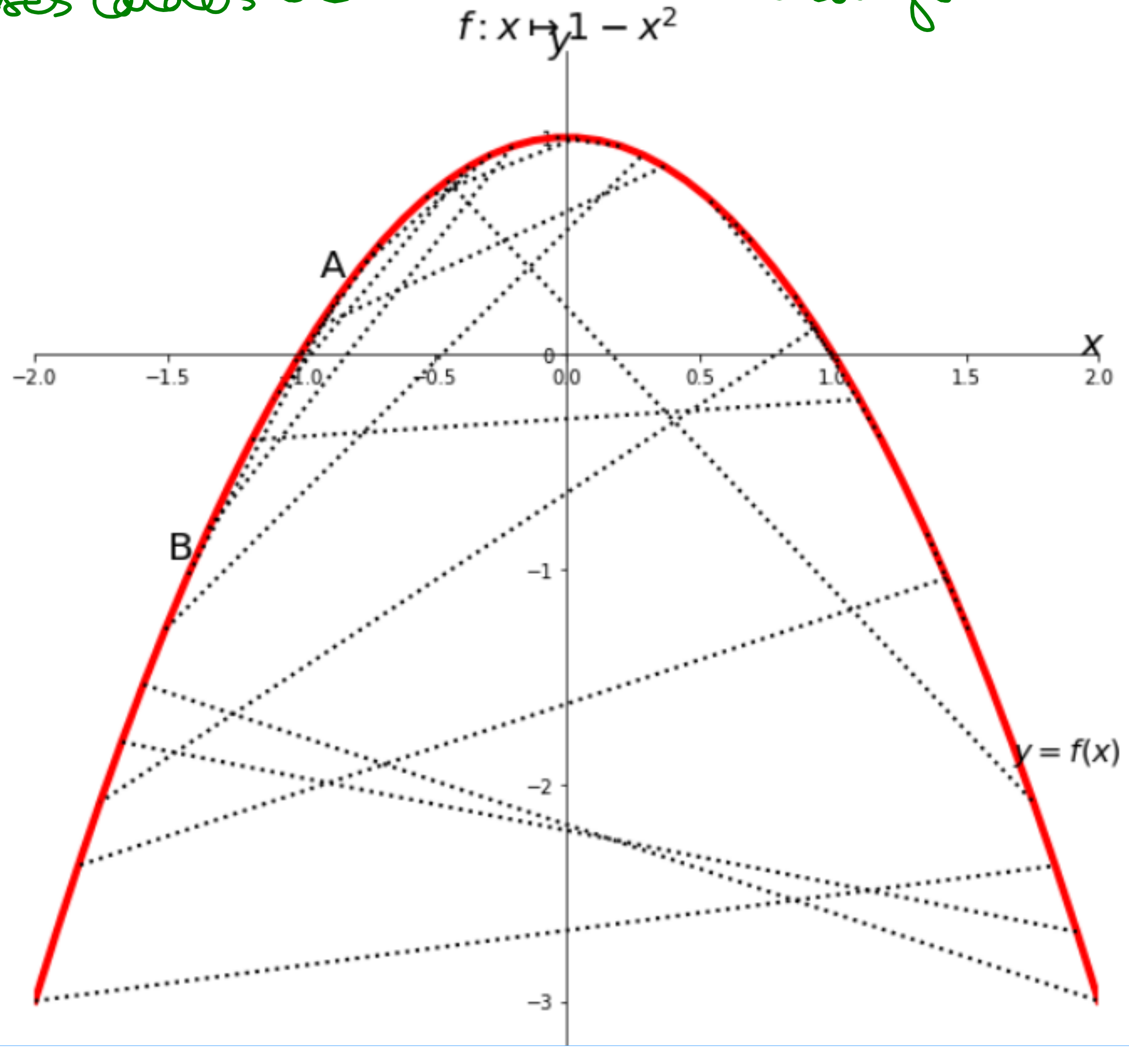
Fonction convexe, courbe en dessous de ses cordes et au-dessus de ses tangentes

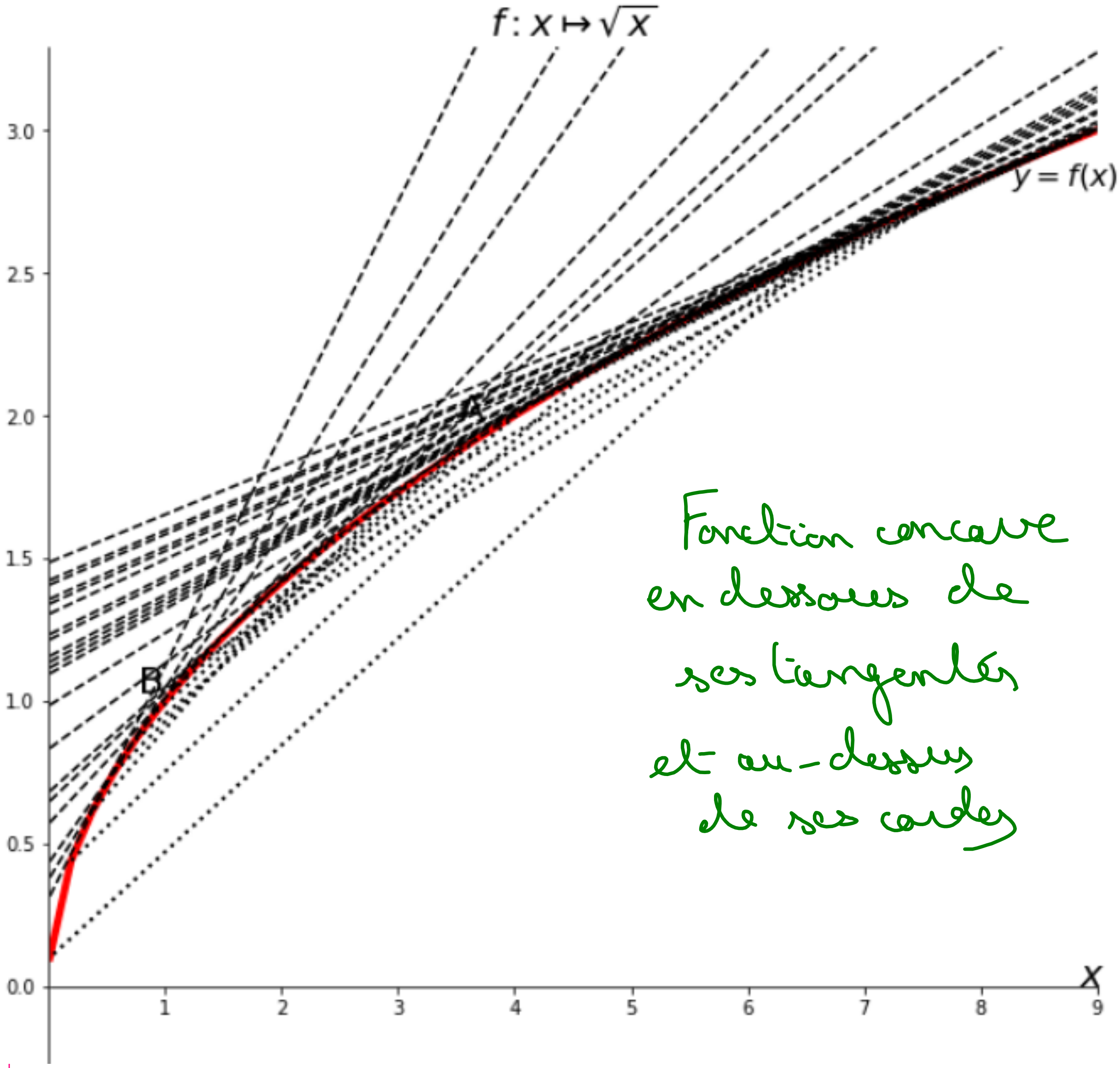


fonction convexe, courbe
en dessous
de ses cordes
et au-dessus
de ses tangentes

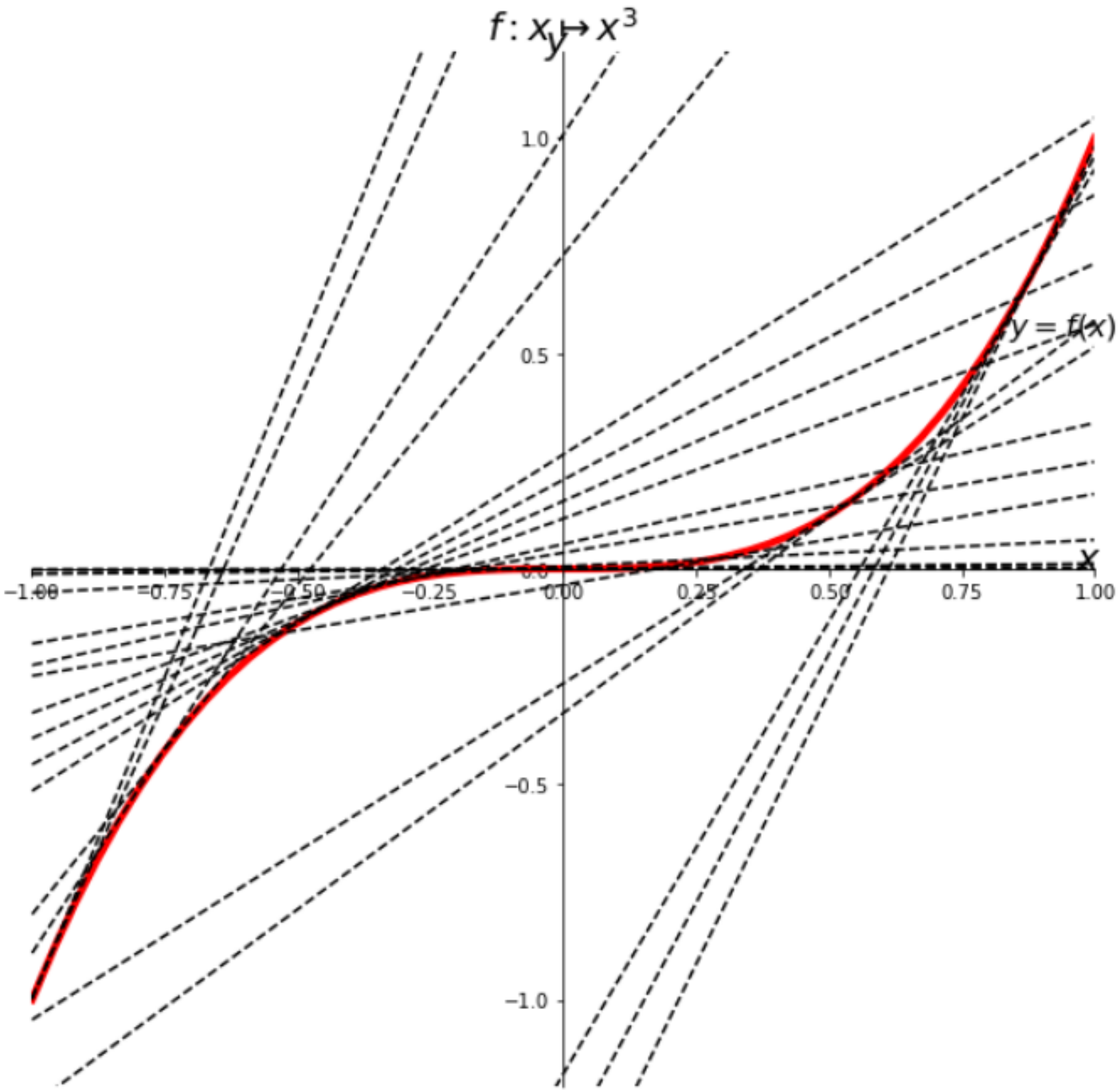


Fonction concave, courbe au-dessus de ses cordes et en dessous de ses tangentes.





Fonction concave
en dessous de
ses tangentes
et au-dessus
de ses cordes

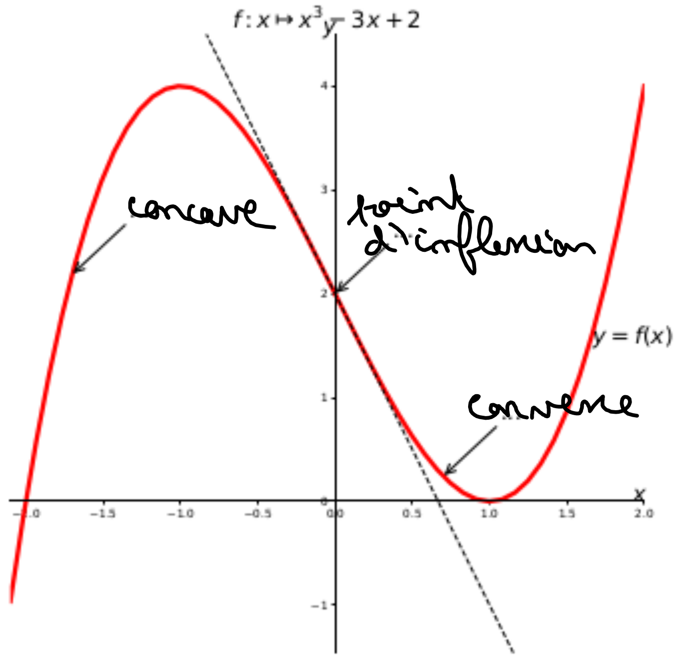


$f : x \mapsto x^3$ concave sur $]-\infty ; 0]$

$f : x \mapsto x^3$ convexe sur $[0 ; +\infty[$

2) Si f convexe sur I alors $-f$ concave sur I car la courbe de $-f$ est la symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.

3)



Capacité 8 ***Lien entre convexité et sens de variation***

Compléter les phrases :

- Si f est convexe et croissante sur un intervalle I, alors f croît de plus en plus ..vite
- Si f est convexe et décroissante sur un intervalle I, alors f décroît de plus en plus ..lentement
- Si f est concave et croissante sur un intervalle I, alors f croît de plus en plus ..lentement
- Si f est concave et décroissante sur un intervalle I, alors f décroît de plus en plus ..vite

Capacité 9 ***Esquisser $\mathscr{C}_f$ à partir des tableaux de variations de f, f' ou f'', voir capacité 6 p.207***

1. On considère une fonction f deux fois dérivable sur $[-5;5]$ dont on donne ci-dessous le tableau de variations ainsi que le tableau de variations de sa dérivée f' :

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-2	↗	0

erreur
$f'(x)$ →

x	-5		0		3		5
~~$f''(x)$~~	3	↘	-2	↗	2	↘	0
		concave		convexe		concave	

Déterminer la convexité de la fonction f et tracer dans un repère une courbe possible pour f.

2. On considère une fonction g deux fois dérivables sur $[-2;6]$, dont on donne ci-dessous les tableaux de variations de g et g''.

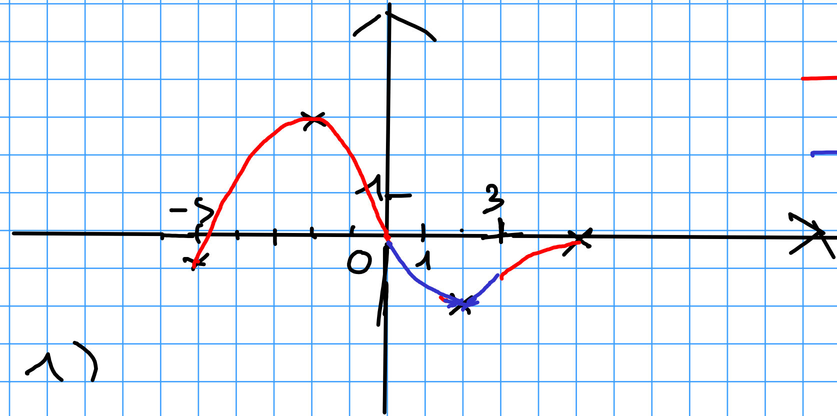
	convexe		concave				convexe	
x	-2		0		3		4		6
$g''(x)$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	2

x	-2		-1		0		2		4		6
$g(x)$	1	↘	-4	↗	3	↗	5	↘	2	↘	0

Déterminer la convexité de la fonction g et tracer dans un repère une courbe possible pour g.

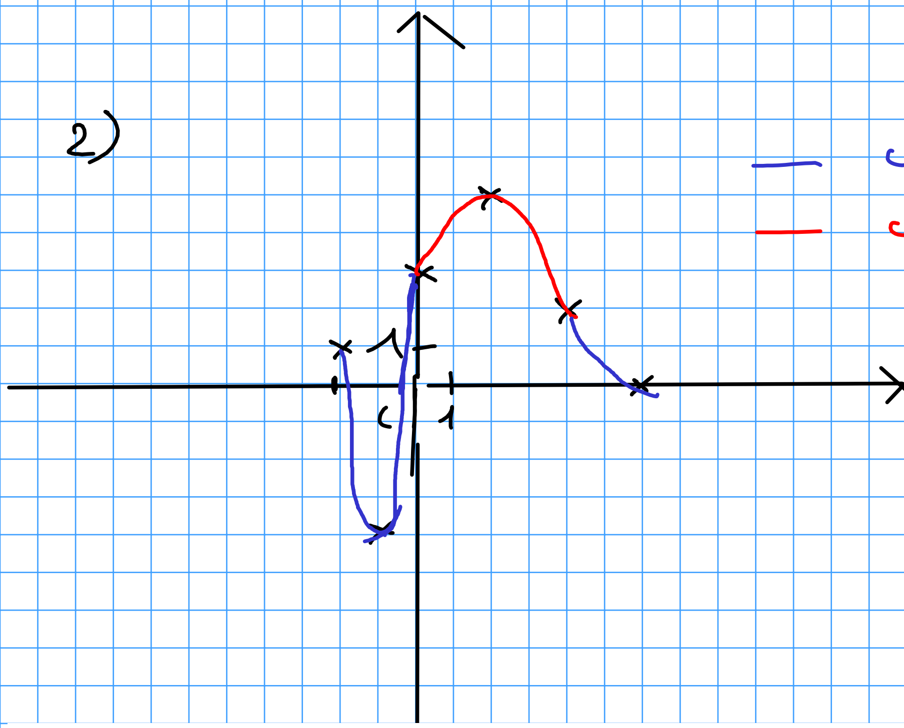
1) • f' décroissante sur $[-5;0]$ et $[3;5]$ donc f concave sur ces intervalles.
• f' croissante sur $[0;3]$ donc f convexe sur cet intervalle.

1)



— f concave
— f convexe

2)

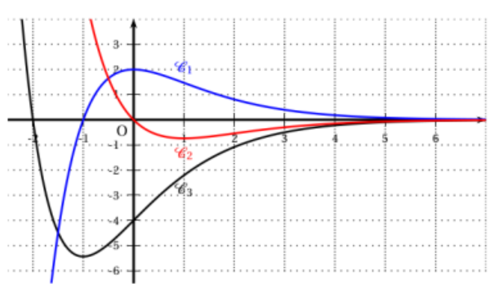


— convexe
— concave

Capacité 11 ***Lier une représentation graphique de f, f' ou f''***

On considère une fonction f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ont été représentées. L'une de ces courbes représente la fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde. Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.



2. On admet que pour tout réel x, on a $f(x) = (-2x-4)e^{-x}$.

   a. Déterminer des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x.

   b. En déduire l'étude de la convexité de f et des éventuels points d'inflexions de sa courbe. Vérifier les conjectures établies à la question 1.

1) $\mathcal{C}_1$ représente f'

$\mathcal{C}_3$ représente f

et $\mathcal{C}_2$ représente f''.

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$			$\nearrow$		
$f'(x)$		$-$	0		$+$		
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$	

f est convexe sur $]-\infty;0]$ et concave sur $[0;+\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

2) Pour tout réel x, on a $f(x)=(-2x-4)e^{-x}$

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$f(x) = u(x) \times v(x)$ avec u et v dérivables sur $\mathbb{R}$

$u(x) = -2x-4$ $\qquad$ $v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = -2$ $\qquad$ $v'(x) = -e^{-x}$

$f' = u'v + uv'$

donc $f'(x) = -2e^{-x} + (-e^{-x})(-2x-4)$

$f'(x) = e^{-x}(-2+2x+4) = e^{-x}(2+2x)$

puis $f''(x) = -e^{-x}(2+2x) + 2e^{-x} = -2xe^{-x}$

On peut alors retrouver les signes de f'' et de f'

et en déduire la convexité et les variations de f.

Capacité 12 ***Démontrer une inégalité de convexité, voir capacité 7 p.208***

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan.

1. Déterminer des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x puis étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. En déduire que pour tout réel x, on a $e^{-x} \geqslant 1 - x$.
4. Démontrer que pour tous réels a et b, $e^{-\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{e^{-a} + e^{-b}}{2}$.

1) f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel x :

$f(x) = e^{-x}$

$f'(x) = -e^{-x}$

$f''(x) = e^{-x}$

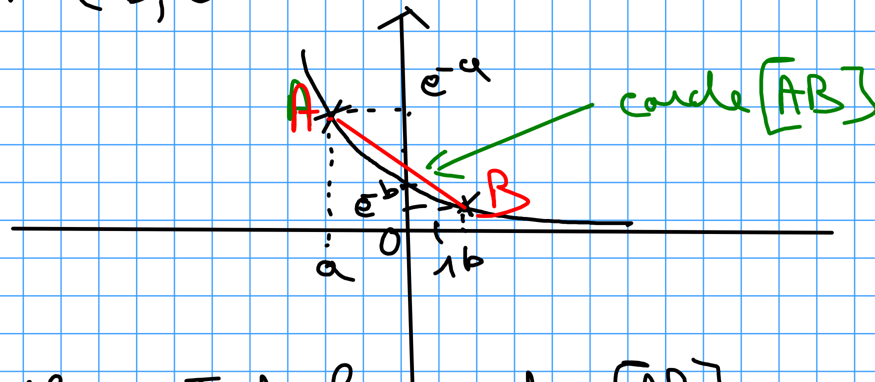
2) Équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 :

$$y = f'(0) \times (x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = -x+1$$

3) Pour tout réel x, on a $f''(x) \geq 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$ et donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
On en déduit l'inégalité de convexité : pour tout réel x, $e^{-x} \geqslant 1-x$.

4) f est convexe sur $\mathbb{R}$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses cordes.
Considérons la corde $[AB]$ avec $A(a; e^{-a})$

et $B(b ; e^{-b})$



Le milieu I de la corde [AB] a pour coordonnées.

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{e^{-a}+e^{-b}}{2} \end{cases} \qquad I\left(\frac{a+b}{2} ; \frac{e^{-a}+e^{-b}}{2}\right)$$

Par convexité de f, le point de C_f de même abscisse que I est en-dessous de I et donc son ordonnée $e^{-\frac{a+b}{2}}$ est inférieure ou égale à celle de I.

On en déduit que : $e^{-\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{e^{-a}+e^{-b}}{2}$

Thème 1 *Fonction de satisfaction*

On appelle fonction « *satisfaction* » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « *satisfaction* » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « *saturation* ».
On définit aussi la fonction « *envie* » comme la fonction dérivée de la fonction « *satisfaction* ». On dira qu'il y a « *souhait* » lorsque la fonction « *envie* » est positive ou nulle et qu'il y a « *rejet* » lorsque la fonction « *envie* » est strictement négative.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction « satisfaction » *différent.*

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « *satisfaction* » g est définie sur l'intervalle $[0;30]$ par $g(x) = 12{,}5x\mathrm{e}^{-0{,}125x+1}$ (x est exprimé en jour).

1. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0;30]$,

$$g'(x) = (12{,}5 - 1{,}5625x)\mathrm{e}^{-0{,}125x+1}.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0;30]$ puis dresser le tableau des variations de g sur cet intervalle.

3. Quelle durée de séjour correspond-elle à l'effet « *saturation* » ?

Partie B

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « *satisfaction* » h, est définie sur l'intervalle $[10;50]$ par

$$h(x) = \frac{90}{1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}}$$

(x est exprimé en millier d'euros).
La courbe $\mathscr{C}_h$ de la fonction h est représentée ci-dessous :

Partie A

g dérivable sur $[0;30]$ par règles opératoires

1) Pour tout réel $x \in [0;30]$:

$g(x) = u(x) \times v(x)$

avec u et v dérivables sur $[0;30]$

Pour tout $x \in [0;30]$:

$u(x) = 12{,}5x$ $\qquad$ $v(x) = e^{-0{,}125x+1}$

$u'(x) = 12{,}5$ $\qquad$ $v'(x) = -0{,}125\, e^{-0{,}125x+1}$

On en déduit que :

$g'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

$g'(x) = 12{,}5\, e^{-0{,}125x+1} + 12{,}5x \times (-0{,}125\, e^{-0{,}125x+1})$

$g'(x) = e^{-0{,}125x+1} \times (12{,}5 - 12{,}5 \times 0{,}125 \times x)$

$$\boxed{g'(x) = e^{-0{,}125x+1} \times (12{,}5 - 1{,}5625x)}$$

2) Pour tout $x \in [0;30]$, on a $e^{-0{,}125x+1} > 0$

donc $g'(x)$ est du signe de $12{,}5 - 1{,}5625x$

$12{,}5 - 1{,}5625x = 0 \iff \frac{12{,}5}{1{,}5625} = 8 = x$

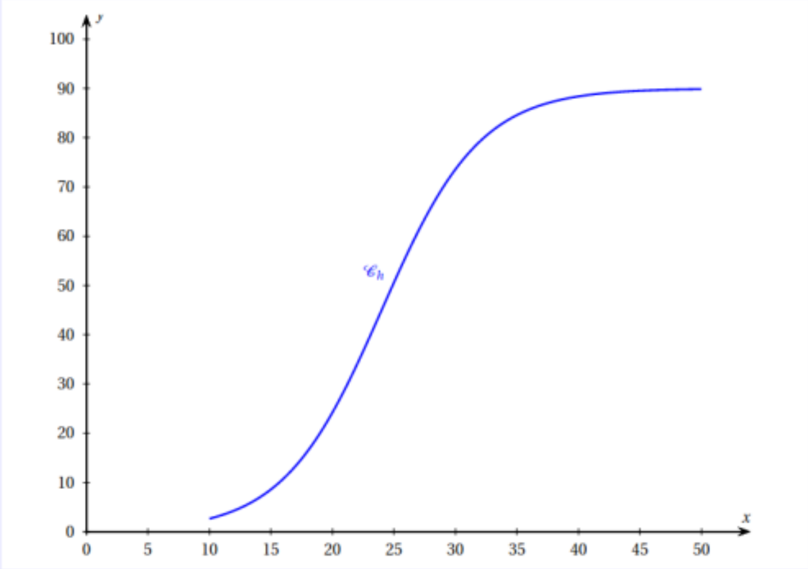
$12{,}5 - 1{,}5625x > 0 \iff 8 > x$

On peut dresser le tableau de signes de $g'(x)$ et en déduire le tableau de variation de g

x	0		8		30
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(0)=0$	↗	100	↘	$375e^{-2{,}75} \simeq 23{,}97$

3) La saturation est atteinte au bout de 8 jours

Partie B Fonction de satisfaction cette fois définie sur $[10;50]$ par $h(x) = \dfrac{90}{1+e^{-0,25x+6}}$



Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	`Dériver(90/(1 + exp(-0.25 * x +6)))` $\dfrac{22,5\mathrm{e}^{-0,25x+6}}{(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6})^2}$
2	`Dériver(22.5 * exp(-0,25 x + 6)/(1 + exp(-0,25 * x + 6))²` $\dfrac{5,625\mathrm{e}^{-0,25x+6}(\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6})^3}$

1. Donner sans justification une expression de $h''(x)$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[10;50]$ l'inéquation $\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1>0$.
3. Étudier la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10;50]$.
4. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « *envie* » décroît ? Justifier.
5. Déterminer, en le justifiant, pour quel salaire annuel la fonction « *satisfaction* » atteint 80. *Arrondir au millier d'euros.*

2) D'après le logiciel de calcul formel, pour tout réel $x \in [10;50]$, on a :

$$h''(x) = \frac{5,625\,e^{-0,25x+6}\left(e^{-0,25x+6}-1\right)}{\left(1+e^{-0,25x+6}\right)^3}$$

3) h est deux fois dérivable sur $[10;50]$ donc sa convexité dépend du signe de $h''(x)$

Pour tout $x \in [10;50]$, on a : $\dfrac{5,625e^{-0,25x+6}}{(1+e^{-0,25x+6})^3} > 0$

donc $h''(x)$ est du signe de $e^{-0,25x+6} - 1$

On résout l'équation

$$e^{-0,25x+6} - 1 = 0 \iff e^{-0,25x+6} = e^0$$
$$\iff -0,25x+6 = 0$$
$$\iff x = \frac{6}{0,25} = 24$$

3) $e^{-0,25x+6} - 1 > 0 \iff e^{-0,25x+6} > 1$
$$\iff e^{-0,25x+6} > e^0$$
$$\iff -0,25x+6 > 0$$
$$\iff \frac{6}{0,25} > x$$
$$\iff 24 > x$$

x	10		24		50
$h''(x)$		+	0	−	

h est donc convexe sur $[0;24]$ et concave sur $[24;30]$

h'' s'annule en changeant de signe en 24

Donc $\mathcal{C}_h$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 24.

4) On en déduit le tableau de variation de la fonction envie h' :

x	10		24		50
$h'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

La fonction envie décroît donc à partir du jour 24

5) $$\text{Satisfaction} = 80 \iff \frac{90}{1+e^{-0,25x+6}} = 80$$

$$\iff \frac{9}{8} = 1 + e^{-0,25x+6}$$

$$\iff \frac{1}{8} = e^{-0,25x+6}$$

$$\iff 8 = e^{0,25x-6}$$

$$\iff \ln(8) = 0,25x - 6$$

$$\iff \boxed{4(\ln(8)+6) = x}$$

Exercice 60 p. 156

60 Coûts moyen et marginal de production

Modèles définis par une fonction d'une variable

Une entreprise fabrique du parfum dont le coût total de production, par jour, en centaine d'euros, est modélisé par la fonction C définie sur $]0 ; 50]$ par :

$C(x) = 0{,}5x^2 + 2x + 200$ pour x litres de parfum.

Le prix de vente d'un litre de parfum est de 2 500 €.

1. a) Montrer que la recette est modélisée par la fonction R définie sur $]0 ; 50]$ par $R(x) = 25x$.

b) Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de x.

c) Déterminer la quantité de parfum à produire pour que le bénéfice soit maximum.

2. Le coût moyen de production d'un litre de parfum, quand on en produit x litres, est modélisé par la fonction C_M telle que $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$ sur $]0 ; 50]$.

a) Dresser le tableau de variations de la fonction C_M.

b) En déduire la quantité de parfum à produire pour obtenir un coût moyen minimum de production.

3. Le coût marginal de production est le supplément de coût total induit par la production d'un litre supplémentaire de parfum. Il est modélisé par la fonction C_m telle que $C_m(x) = C(x + 1) - C(x)$ sur $]0 ; 50]$.

a) Déterminer le coût marginal pour une production de 20 L de parfum, c'est-à-dire l'augmentation du coût total de production pour passer de 20 L à 21 L.

b) Calculer $C'(20)$. Comparer avec le résultat précédent.

4. En pratique, on assimile le coût marginal de production à la dérivée du coût total.

a) Déterminer $C_m(x)$ sur $]0 ; 50]$.

b) Préciser la convexité de la fonction C sur $]0 ; 50]$.

c) Résoudre l'équation $C_M(x) = C_m(x)$ sur $]0 ; 50]$.

MATHS & ÉCONOMIE

- Le **coût moyen** de production est le coût engendré en moyenne par la production d'une unité.
- Le **coût marginal** est le coût additionnel induit par la production d'une unité supplémentaire.

Il est souvent défini, si la fonction coût est dérivable, par sa dérivée : $C_m(x) = C'(x)$.

En effet, $C_m(x) = \frac{C(x+1) - C(x)}{(x+1) - x}$, taux d'accroissement de la fonction C entre x et $x + 1$.

Un chef d'entreprise rationnel ne produit que tant que le prix de vente est supérieur au coût marginal.

1) a) 1 litre → 25 centaines d'euros
x litres → $25x$ centaines d'euros
donc Recette pour x litres :
$R(x) = 25x$ centaines d'euros

b) Bénéfice = Recette − Coût
donc pour x litres, le bénéfice est :
$B(x) = R(x) - C(x) = 25x - (0{,}5x^2 + 2x + 200)$

c) Pour déterminer le bénéfice maximum, on étudie les variations de la fonction polynôme du second degré $B(x) = -0{,}5x^2 + 23x - 200$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-23}{2\times(-0{,}5)} = 23$$

et $a<0$ donc B est croissante sur $[0;23]$ puis décroissante sur $[23;50]$.

Le bénéfice maximum est donc atteint pour une production de 23 litres.

2) Pour x litres produits avec $x \in]0;50]$, le coût moyen de production est de :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0{,}5x^2+2x+200}{x}$$

$$C_M(x) = 0{,}5x + 2 + \frac{200}{x}$$

C_M est dérivable sur $]0;50]$ et pour tout $x \in]0;50]$, on a : $C'_M(x) = 0{,}5 - \frac{200}{x^2} = \frac{0{,}5x^2-200}{x^2} = \frac{0{,}5(x^2-400)}{x^2}$

$$C'_M(x) = \frac{0{,}5(x-20)(x+20)}{x^2}$$

Pour tout $x \in]0;50]$, on a $\frac{0{,}5(x+20)}{x^2} > 0$

donc $C'_M(x)$ du signe de $x-20$

x	0		20		50
$C'_M(x)$	||	$-$	0	$+$	

x	0		20		50
$C_M(x)$	‖	↘		↗	

Le coût moyen est donc minimal pour $x = 20$

3) a) coût marginal pour $x = 20$:

$C_m(20) = C(20+1) - C(20) = 22,5$

et $C'(20) = 0,5 \times 2 \times 20 + 2 = 22$

On a $C_m(20)$ très proche de $C'(20)$

Plus généralement si C dérivable en x, on approche le coût marginal en x par $C'(x)$

4) a) Admettons que pour tout $x \in]0;50]$, le coût marginal est donné par :

$$C_m(x) = C'(x) = 0,5 \times 2 \times x + 2 = x + 2$$

b) La fonction C a pour dérivée C_m qui est affine croissante sur $]0;50]$ donc la fonction C est convexe sur $]0;50]$.

c) On résout dans $]0;50]$, l'équation :
Coût marginal = Coût moyen

$$C_M(x) = C_m(x)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{C(x)}{x} = C'(x)$$

$$\Longleftrightarrow 0{,}5x + 2 + \frac{200}{x} = x + 2$$

$$\Longleftrightarrow 200 = 0{,}5x^2$$

$$\Longleftrightarrow 400 = x^2$$

$$\Longleftrightarrow 20 = x \quad \text{car } x \in]0;50]$$

Ainsi le coût marginal est égal au coût moyen lorsque le coût moyen est minimal.