Exemples du cours Dérivation 2021/2022

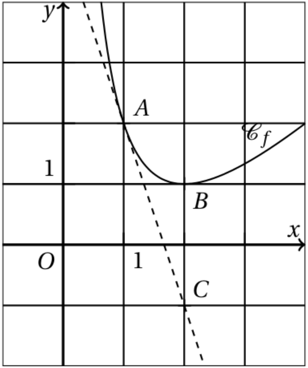
Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

8 novembre 2021

Table des matières

Capacité 1



Capacité 1

1. Le nombre dérivé de f en 2 a pour valeur :

   a. 2 **b.** 1 $\boxed{\textbf{c.}\quad 0}$ **d.** $\frac{1}{2}$

1. Le nombre dérivé de f en 2 a pour valeur :

   a. 2 **b.** 1 $\boxed{\textbf{c.}\ 0}$ **d.** $\frac{1}{2}$

2. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est :

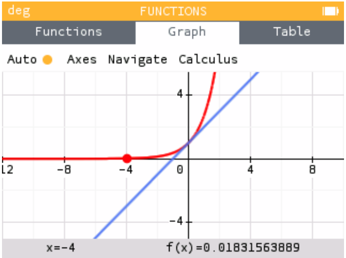
   a. $y = -\frac{1}{3}x + 2$ **b.** $y = 3x + \frac{5}{3}$ $\boxed{\textbf{c.}\ y = 5 - 3x}$ **d.** $y = -3x + \frac{5}{3}$

Capacité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$. On rappelle que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a $f'(x) = f(x)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.
Équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Longleftrightarrow y = \mathrm{e}^0(x-0) + \mathrm{e}^0$$
$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Longleftrightarrow \boxed{y = x+1}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$. On rappelle que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a $f'(x) = f(x)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.
Graphiquement on peut conjecturer que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 0.



Capacité 2

Démontrons que pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.
Étudions le signe de la différence $d : x \mapsto \mathrm{e}^x - (x+1)$ et pour cela étudions les variations de cette fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a $d'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

Capacité 2

Pour tout réel x, on a $d'(x) = e^x - 1$.

- D'une part :

$$e^x - 1 = 0 \iff e^x = 1$$
$$e^x - 1 = 0 \iff x = 0$$

- D'autre part :

$$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1$$
$$e^x - 1 > 0 \iff x > 0$$

Capacité 2

On en déduit le tableau de variation de la fonction d :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		$\searrow$	$d(0)=0$	$\nearrow$	

Capacité 2

Le minimum de d sur $\mathbb{R}$ est $d(0)=0$ donc pour tout réel x :

$$d(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{x} \geqslant x+1$$

Cette inégalité prouve que la courbe de la fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0 dont une équation est $y=0$.

Soit les fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \frac{x^6}{3} - 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}$$

Expression de la dérivée de $f \times g$, pour tout réel x on a :

- d'une part $f'(x) = \frac{6x^5}{3} - 2 = 2x^5 - 2$
- d'autre part $g'(x) = \mathrm{e}^x$

D'après la formule du cours $(f \times g)' = f'g + fg'$ donc :

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (2x^5 - 2)(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}) + (\frac{x^6}{3} - 2x + 1)\mathrm{e}^x$$

Soit les fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \frac{x^6}{3} - 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}$$

Expression de la dérivée de g^2, pour tout réel x on a :

- $g'(x) = \mathrm{e}^x$

D'après la formule du cours $(g \times g)' = g'g + gg' = 2gg'$ donc :

$$(g \times g)'(x) = 2g(x)g'(x) = 2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e})$$

Soit les fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \frac{x^6}{3} - 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}$$

Expression de la dérivée de $\frac{-2}{g}$, pour tout réel x on a :

- $g'(x) = \mathrm{e}^x$

D'après la formule du cours $\left(\frac{-2}{g}\right)' = -2\left(\frac{1}{g}\right)' = -2\frac{-g'}{g^2}$ donc :

$$\left(\frac{-2}{g}\right)'(x) = \frac{2g'(x)}{g^2(x)} = \frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e})^2}$$

Capacité 3

Soit les fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, on a :

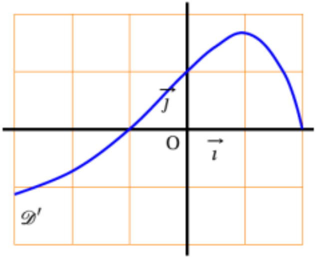
$$f(x) = \frac{x^6}{3} - 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}$$

Expression de la dérivée de $\frac{f}{g}$, pour tout réel x on a :

- d'une part $f'(x) = \frac{6x^5}{3} - 2 = 2x^5 - 2$
- d'autre part $g'(x) = \mathrm{e}^x$

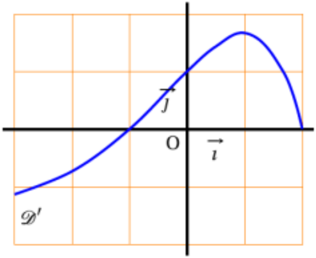
D'après la formule du cours $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ donc :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(f'g - fg')(x)}{g^2(x)} = \frac{(2x^5 - 2)(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}) - (\frac{x^6}{3} - 2x + 1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e})^2}$$

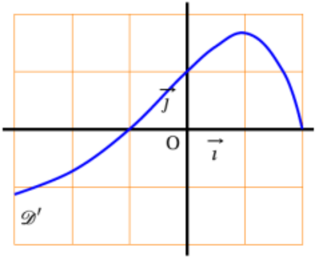


La courbe représente la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $[-3;2]$ et graphiquement on peut conjecturer que pour tout $x \in [-3;-1]$, on a $f'(x) \leqslant 0$.

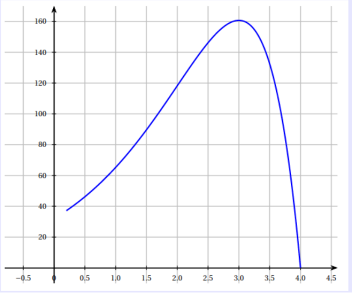
Capacité 5



La courbe représente la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $[-3;2]$, et graphiquement on peut conjecturer que pour tout $x \in [1;2]$, on a $f'(x) \geqslant 0$ et donc f croissante et pas strictement décroissante sur $[1;2]$.



Graphiquement on a $f' < 0$ sur $[-3;-1[$ et $f' > 0$ sur $]-1;2]$ donc f strictement décroissante sur $[-3;-1]$ puis strictement croissante sur $[-1;2]$.
On a donc $f(-1) < f(0) = -1$ donc il est faux que pour tout $x \in [-3;2]$, $f(x) \geqslant -1$.



Graphiquement on peut lire que la puissance maximale atteinte par le rameur est de 160 Watts et qu'il développe une puissance supérieure à 100 Watts pendant un peu plus de 2 dixièmes de seconde.

La puissance f du rameur en fonction du temps est modélisée par la fonction f définie sur $[0,2\,;4]$ par $f(x)=(-8x+32)\mathrm{e}^{x}$.

La puissance f du rameur en fonction du temps est modélisée par la fonction f définie sur $[0,2;4]$ par $f(x)=(-8x+32)\mathrm{e}^x$.

- On applique la formule de dérivation d'une produit $(u\times v)'=u'v+uv'$. Pour tout réel $x\in[0,2;4]$, on a :

$$f'(x)=-8\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x(-8x+32)=\mathrm{e}^x(-8x+24)$$

La puissance f du rameur en fonction du temps est modélisée par la fonction f définie sur $[0,2\,;4]$ par $f(x)=(-8x+32)\mathrm{e}^x$.

- On applique la formule de dérivation d'une produit $(u\times v)'=u'v+uv'$. Pour tout réel $x\in[0,2\,;4]$, on a :

$$f'(x)=-8\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x(-8x+32)=\mathrm{e}^x(-8x+24)$$

- Pour tout $x\in[0,2\,;4]$, on a $\mathrm{e}^x>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-8x+24$, donc $f'(x)\geqslant 0$ sur $[0,2;3]$, décroissante sur $[3;4]$ et atteint son maximum $f(3)=8\mathrm{e}^3$ en $x=3$.

Thème 1

On suppose que le sportif améliore sa meilleure performance de 5 % tous les mois. Pour déterminer le nombre de mois d'entraînement nécessaires pour qu'il dépasse les 200 W, on utilise un algorithme de seuil et on trouve qu'il lui faut 5 mois pour atteindre sont objectif.

```python
from math import exp
n = 0
u = 8 * exp(3)
while u <= 200:
    u = u * 1.05
    n = n + 1
```

Capacité 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$.

Capacité 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Capacité 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- pour tout réel x, $f'(x) = 152x^4 + 20x^3 + 15$ et $f''(x) = 60x^3 + 60x^2 = 60x^2(x+1)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$.

Capacité 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$.

- Pour tout réel x, on a $f''(x) = 60x^2(x+1)$ avec $60x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ du signe de $x+1$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$.

- Pour tout réel x, on a $f''(x) = 60x^2(x+1)$ avec $60x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ du signe de $x+1$
- Tableau de variations de f' :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$f'(-1)$		$\nearrow$		

On a $f'(-1) = 15 \times (-1)^4 + 20 \times (-1)^3 + 15$

$f'(-1) = 15 - 20 + 15 = 10$

Capacité 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$.

- Du tableau de variations de f', on déduit que le minimum de f' sur $\mathbb{R}$ est strictement positif et donc que pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

Capacité 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$.

- Du tableau de variations de f', on déduit que le minimum de f' sur $\mathbb{R}$ est strictement positif et donc que pour tout réel x, $f'(x) > 0$.
- On peut conclure que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.