Correction de la fiche d'exercices n°2 (partielle)

Exercice 5 *Lever une FI en factorisant par le terme prépondérant* ☆☆

Déterminer les limites suivantes. On mettra en facteur les termes dominants pour lever l'indétermination.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - x + 1$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2-1}{x^2+1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2-x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x+1}$

4) On a une FI $\dfrac{-\infty}{+\infty}$

On factorise par les termes prépondérants en $-\infty$:

$$\frac{x^3+1}{x^2-x} = \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{x^3}{x^2} \times \frac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$\frac{x^3+1}{x^2-x} = x \times \frac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}}$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}} = 1$

donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2-x} = -\infty$

5) On a une FI du type $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

On factorise par les termes prépondérants en $+\infty$:

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{x\times\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\times\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{x}{x^2}\times\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{x} \times \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$

Donc par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2+x+1} = 0$

8) On a une FI du type $\frac{+\infty}{+\infty}$

On factorise par les termes prépondérants en $+\infty$. Pour tout $x > 0$:

$$\frac{\sqrt{x^2+x}}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$x > 0$ donc $\sqrt{x^2} = |x| = x$

donc $\frac{\sqrt{x^2+x}}{x+1} = \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}}$ par composition

et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$

donc par quotient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x+1} = 1$$

Exercice 6 *Lever une FI en simplifiant des facteurs communs* ☆☆

Déterminer les limites suivantes. On cherchera des facteurs communs au numérateur et au dénominateur pour lever l'indétermination.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{x-3}}{e^x + e^{x-1}}$
2. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$
4. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \frac{9x^2-1}{3x-1}$

1) Pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{e^x + e^{x-3}}{e^x + e^{x-1}} = \frac{e^x(1+e^{-3})}{e^x(1+e^{-1})} = \frac{1+e^{-3}}{1+e^{-1}}$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{x-3}}{e^x+e^{x-1}} = \frac{1+e^{-3}}{1+e^{-1}}$

2) Pour tout $x \neq -1$:

$$\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = x-1$$

donc $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x+1} = -1-1 = -2$

3) Pour tout $x \neq 3$:

$$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$$

donc $\frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = x+2$

donc $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} = -3+2=-1$

4) Pour tout $x \neq \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{9x^2-1}{3x-1} = \dfrac{(\cancel{3x-1})(3x+1)}{\cancel{3x-1}}$

Donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{9x^2-1}{3x-1} = 3\times\dfrac{1}{3}+1=2$

Exercice 7 *Lever une FI sur des racines avec une expression conjuguée* ☆☆☆

Méthode

L'expression conjuguée de $A+B$ est $A-B$ et réciproquement.
Dans une expression avec radicaux, on peut utiliser l'expression conjuguée et l'identité remarquable $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ pour faire passer les radicaux du numérateur au dénominateur ou vice-versa.

1. On veut déterminer la limite de $\sqrt{x^2+1}-x$ en $+\infty$. Par la suite x désigne un réel quelconque.
   a. Quelle est l'expression de conjuguée de $\sqrt{x^2+1}-x$?
   b. Montrer que $\sqrt{x^2+1}-x = \dfrac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$.
   c. Simplifier l'expression précédente et en déduire la limite de $\sqrt{x^2+1}-x$ en $+\infty$.

1) a) L'expression conjuguée de $\sqrt{x^2+1}-x$ est $\sqrt{x^2+1}+x$

b) $\sqrt{x^2+1}-x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)\times(\sqrt{x^2+1}+x)}{1\times(\sqrt{x^2+1}+x)}$

$= \dfrac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

Car on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2+1 = +\infty$

et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

puis par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1}+x = +\infty$

et enfin par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0^+$

2. Avec la même méthode déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$ **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

a) Pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x} = \frac{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x} = \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}^2-x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x} = \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x^2+x-x^2} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}{x}$$

Or $x > 0$ donc $\sqrt{x^2} = |x| = x$

donc $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}-x} = \dfrac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x}}+1$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{1} = 1$ par composition

donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}}+1 = 2$

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}-x} = 2$

b) Pour tout $x>0$:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} \times \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}^{\,2}-\sqrt{x}^{\,2}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}} \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$ par composition

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 = 2$ par somme

donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+1/x}+1} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 10 *Limite par comparaison et expression conjuguée* ☆☆

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+\sin(x)+1}$.
On rappelle que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.

1. **a.** Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a :

$$\sqrt{x^2+\sin(x)+1} \geqslant \sqrt{x^2}$$

   b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

1) a) Pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

donc $x^2+1+(-1) \leq x^2+1+\sin(x) \leq x^2+1+1$

donc $x^2 \leq x^2+1+\sin(x) \leq x^2+2$

La fonction $\sqrt{}$ est croissante sur $[0;+\infty[$ donc :

$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+\sin(x)+1} \leq \sqrt{x^2+2}$$

b) Pour tout $x \geq 0$ on a $\sqrt{x^2} = |x| = x$

donc d'après ce qui précède on a :

$$x \leq \sqrt{x^2+\sin(x)+1}$$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Donc par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+\sin(x)+1} = +\infty$

2. **a.** Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a :

$$f(x) - x = \frac{1 + \sin(x)}{\sqrt{x^2 + \sin(x) + 1} + x}$$

b. À l'aide du théorème de limite par encadrement, démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$.

2) a) Pour tout réel $x \geq 0$; on a :

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 + \sin(x) + 1} - x$$

$$f(x) - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+\sin(x)+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+\sin(x)+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+\sin(x)+1} + x}$$

$$f(x) - x = \frac{\sqrt{x^2+\sin(x)+1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2+\sin(x)+1} + x}$$

$$f(x) - x = \frac{\cancel{x^2} + \sin(x) + 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+\sin(x)+1} + x}$$

$$f(x) - x = \frac{\sin(x) + 1}{\sqrt{x^2+\sin(x)+1} + x}$$

De plus on a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

donc $0 \leq \sin(x) + 1 \leq 2$

comme $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\sin(x)+1} + x} > 0$, on a

$$0 \leq \frac{\sin(x) + 1}{\sqrt{x^2+\sin(x)+1} + x} \leq \frac{2}{\sqrt{x^2+\sin(x)+1} + x}$$

De plus $x^2 - 1 + 1 \leq x^2 + \sin(x) + 1$

donc $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + \sin(x) + 1}$

donc $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + \sin(x) + 1} + x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2} + x}$

et donc $0 \leq \dfrac{\sin(x) + 1}{\sqrt{x^2 + \sin(x) + 1} + x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 1 + 1} + x}$

De plus $x > 0$ donc $\sqrt{x^2} = x$

Donc $0 \leq \dfrac{\sin(x) + 1}{\sqrt{x^2 + \sin(x) + 1} + x} \leq \dfrac{2}{x + x} = \dfrac{1}{x}$

Or on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Donc d'après le théorème de limite par encadrement on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x) + 1}{\sqrt{x^2 + \sin(x) + 1} + x} = 0$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$

c. Dans un repère du plan, pour tout entier naturel n on considère les points $M_n(n; f(n))$ et $P_n(n; n)$. Compléter la fonction Python `ecart`, fournie ci-dessous, qui prend en paramètre un réel strictement positif `epsilon` et renvoie le plus petit entier naturel n tel que l'écart d'ordonnée entre les points M_n et P_n soit strictement inférieur à `epsilon`.


```python
#sqrt est la fonction racine carrée, sin est la fonction sinus
from math import sqrt, sin

def f(x):
    return sqrt(x ** 2 + sin(x) + 1)

def ecart(epsilon):
    n = 0
    while abs(f(n)-n) >= epsilon:
        n = n+1
    return n
```

Exercice 2 *Asymptotes* ☆☆

Soit a et b deux réels fixés.
Dans un repère du plan, on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation :

$$y = \frac{(a+b)x^2}{x^2+1} + \frac{1}{x-b+a} + b$$

On admet que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et que la droite d'équation $x = 7$ est aussi asymptote à $\mathscr{C}$.
En détaillant la démarche, déterminer les valeurs des coefficients a et b.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{b-a\}$
par $f(x) = \frac{(a+b)x^2}{x^2+1} - \frac{1}{x-b+a} + b$

Pour tout $x>0$, on a :

$$f(x) = \frac{\cancel{x^2} \times (a+b)}{\cancel{x^2} \times \left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - \frac{1}{x-b+a} + b$$

Étudions la limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a+b}{1+\frac{1}{x^2}} = a+b \quad \text{par quotient}$$

et $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-b+a} = 0$$

donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a+b+b$

Or la droite d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

On en déduit que $\boxed{a+b+b=1}$

De plus la droite d'équation $x=7$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ donc la limite de f en 7 (à gauche ou à droite) est infinie.

Or la limite de $\frac{(a+b)x^2}{x^2+1}+b$ en tout nombre est finie.

Donc la seule possibilité d'une limite infinie est celle de $\frac{1}{x-b+a}$

Celle-ci ne peut être infinie que lorsque x tend vers $b-a$.

On en déduit que $\boxed{b-a=7}$

Finalement a et b sont solutions du système :

$$S\begin{cases} a+b+b=1 \\ b-a=7 \end{cases}$$

On le résout par substitution :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} b-7+b+b=1 \\ a=b-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b=8 \\ a=7+b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{8}{3} \\ a=7+\frac{8}{3}=\frac{29}{3} \end{cases}$$

Finalement la fonction recherchée est définie sur $\mathbb{R} - \{7\}$

par $\boxed{f(x) = \dfrac{\left(\frac{25}{3}+\frac{8}{3}\right)x^2}{x^2+1} + \dfrac{1}{x-7} + \dfrac{8}{3}}$

Exercice 8 *Lever une FI avec une règle de croissance comparée* ☆☆

1. Déterminer les limites suivantes. On factorisera par les termes prépondérants et on pourra utiliser une règle de croissance comparée pour lever l'indétermination.

   a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^{x}$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - x^4}{x^2+1}$ **d.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^x + x}$

2. En utilisant un changement de variable ($X = \dfrac{1}{x}$ ou $X = \sqrt{x}$ ...) se ramener à l'application d'une règle de croissances comparées.

   a. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\mathrm{e}^{1/x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ **c.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\mathrm{e}^{x^3}$

1) a) Pour tout $x > 0$, on a : $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0^+$ par croissances comparées

b) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0$ par croissances comparées

c) Pour tout $x > 0$:

$$\frac{e^x - x^4}{x^2+1} = \frac{e^x \times \left(1 - \frac{x^4}{e^x}\right)}{x^2 \times \left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1-\frac{x^4}{e^x}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ par croissances comparées

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4}{e^x} = 0$ par croissances comparées

et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \frac{x^4}{e^x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$ par quotient

Donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} \times \dfrac{1 - \frac{x^4}{e^x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = +\infty$

d) Pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{e^x + e^{3x}}{e^x + x} = \frac{e^{3x} \times \left(e^{-2x} + 1\right)}{e^x \times \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}$$

$$\frac{e^x + e^{3x}}{e^x + x} = e^{2x} \times \frac{e^{-2x} + 1}{1 + \frac{x}{e^x}}$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$ par composition

De plus $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \text{ par composition} \\ \text{et } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-2x} + 1}{1 + \frac{x}{e^x}} = 1$ par quotient

Enfin on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} \times \dfrac{e^{-2x}+1}{1+\frac{x}{e^x}} = +\infty$

2) a) Pour tout $x > 0$:

$$x e^{1/x} = \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}}$$

Or on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$

Donc par composition $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}} = +\infty$

b) Pour tout $x > 0$:

$$x e^{-\sqrt{x}} = \frac{x}{e^{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}^2}{e^{\sqrt{x}}}$$

Or a $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X^2}{e^X} = 0^+$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}^2}{e^{\sqrt{x}}} = 0^+$

c) On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

et $\lim\limits_{X \to -\infty} X e^X = 0^-$

donc par composition

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 e^{x^3} = 0^-$$

Exercice 9 *Limite par comparaison* ☆☆

Déterminer les limites suivantes en appliquant un théorème de limite par comparaison ou par encadrement.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\sin(x)}}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x+\sin(x)}$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x+\sin(x)}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(x) - \sqrt{x}$

1) Pour tout réel $x > 0$, on a :

$-1 \leq \sin(x) \leq 1$

donc $e^{-1} \leq e^{\sin x} \leq e^1$ par croissance de l'exponentielle

donc $\dfrac{e^{-1}}{x} \leq \dfrac{e^{\sin x}}{x} \leq \dfrac{e^1}{x}$

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-1}}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^1}{x} = 0^+$

Donc d'après le théorème de limite par encadrement :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sin(x)}}{x} = 0$$

2) Pour tout $x > 0$ on a

$$-1 \leq \sin(x)$$

donc $x - 1 \leq x + \sin(x)$

donc $e^{x-1} \leq e^{x+\sin(x)}$ par croissance de l'exponentielle

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = +\infty$ par composition

Donc par comparaison on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x+\sin(x)} = +\infty$

3) Pour tout $x < 0$, on a

$$\sin(x) \leq 1$$

donc $x + \sin(x) \leq x + 1$

donc $e^{x+\sin(x)} \leq e^{x+1}$ par croissance de l'exponentielle

de plus $0 < e^{x+\sin(x)}$

donc $0 < e^{x+\sin(x)} \leq e^{x+1}$

Ensuite on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x+1} = 0^+$ par composition

Donc d'après le théorème de limite par encadrement, on a

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x+\sin(x)} = 0^+$$

4) Pour tout $x > 0$, on a

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

donc $-\sqrt{x} - 1 \leq \cos(x) - \sqrt{x} \leq -\sqrt{x} + 1$

On ne conserve que l'inégalité de droite

$$\cos(x) - \sqrt{x} \leq -\sqrt{x} + 1$$

Comme on a $\lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x} + 1 = -\infty$

, on en déduit par comparaison que :

$$\lim_{x \to +\infty} \cos(x) - \sqrt{x} = -\infty$$