Correction de la fiche d'exercices Compléments sur la dérivation

Exercice 1 *Dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions dérivables*

Chaque fonction f est dérivable sur l'intervalle I et on note f' sa fonction dérivée. Déterminer une expression de $f'(x)$ pour x appartenant à I.

1. $f : x \mapsto 6x^5 + 5x^6 + 5$ et $I = \mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto e^x - \sqrt{x} + ex + e^2$ et $I =]0\,;+\infty[$
3. $f : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + x$ et $I = \mathbb{R}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{2}$ et $I =]0\,;+\infty[$

1) $f(x) = 6x^5 + 5x^6 + 5$

donc $f'(x) = 6 \times 5 x^{5-1} + 5 \times 6 x^{6-1} + 0$

$f'(x) = 30x^4 + 30x^5$

2) $f(x) = e^x - \sqrt{x} + ex + e^2$

donc $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + e$

3) $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + x$

donc $f'(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + 1$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{2}$

on transforme $f(x) = \dfrac{1}{x} - 3 \times x^{-2} + \dfrac{1}{2}$

donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 3 \times (-2) \times x^{-2-1} + 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3}$

Exercice 2 *Dérivée d'un produit de fonctions dérivables*

Chaque fonction f est dérivable sur l'intervalle I et on note f' sa fonction dérivée. Déterminer une expression de $f'(x)$ pour x appartenant à I.

1. $f : x \mapsto (x+1)e^x$ et $I = \mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ et $I =]0; +\infty[$
3. $f : x \mapsto (e^x + e^{-x})^2$ et $I = \mathbb{R}$
4. $f : x \mapsto (x^2+1)e^{-x}$ et $I = \mathbb{R}$

1) $f(x) = u(x) \times v(x)$

avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = e^x$

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$

$(u \times v)' = u'v + uv'$

donc $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

$f'(x) = 1 \times e^x + (x+1)e^x$

$f'(x) = 2e^x + xe^x$

2) $f(x) = u(x) \times v(x)$

avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(u \times v)' = u'v + uv'$

donc $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}^2}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

3) $f(x) = u(x) \times u(x)$

avec $u(x) = e^{x} + e^{-x}$

et $u'(x) = e^{x} - e^{-x}$

$(u \times u)' = u'u + uu' = 2u'u$

donc $f'(x) = 2 \times (e^{x} - e^{-x})(e^{x} + e^{-x})$

$f'(x) = 2\left((e^{x})^2 - (e^{-x})^2\right)$

$f'(x) = 2(e^{2x} - e^{-2x})$

4) $f(x) = u(x) \times v(x)$

avec $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -e^{-x}$

$(u \times v)' = u'v + uv'$

donc $f'(x) = 2xe^{-x} + (x^2+1) \times (-e^{-x})$

$f'(x) = (2x - x^2 - 1)e^{-x}$

$f'(x) = -(x-1)^2 e^{-x}$

Exercice 3 *Dérivée d'un quotient de fonctions dérivables*

Chaque fonction f est dérivable sur l'intervalle I et on note f' sa fonction dérivée. Déterminer une expression de $f'(x)$ pour x appartenant à I.

1. $f : x \mapsto \dfrac{3x-1}{4+5x}$ et $\mathrm{I} =]-4/5\,; +\infty[$
2. $f : x \mapsto \dfrac{3}{1+e^x}$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+e^x}$ et $\mathrm{I} =]0\,; +\infty[$
4. $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

1) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

avec $u(x) = 3x-1$ et $v(x) = 4+5x$

$u'(x) = 3$ et $v'(x) = 5$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{3(4+5x) - 5(3x-1)}{(4+5x)^2}$

$$f'(x) = \frac{17}{(4+5x)^2}$$

2) $f(x) = 3 \times \dfrac{1}{v(x)}$

avec $v(x) = 1 + e^x$

$v'(x) = e^x$

$$\left(3 \times \frac{1}{v}\right)' = 3 \times \frac{-v'}{v^2}$$

donc $f'(x) = 3 \times \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$

$$f'(x) = \frac{-3e^x}{(1+e^x)^2}$$

3) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 1+e^{x}$

$u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = e^{x}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

donc $$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (1+e^{x}) - e^{x} \times \sqrt{x}}{(1+e^{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1+e^{x} - e^{x} \times 2\sqrt{x}^2}{2\sqrt{x}}}{(1+e^{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+e^{x} - 2x\,e^{x}}{(1+e^{x})^2}$$

4) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

avec $u(x) = e^{x} - e^{-x}$ et $v(x) = e^{x} + e^{-x}$

$u'(x) = e^{x} - (-e^{-x})$ et $v'(x) = e^{x} - e^{-x}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

donc $f'(x) = \dfrac{(e^{x}+e^{-x})^2 - (e^{x}-e^{-x})^2}{(e^{x}+e^{-x})^2}$

$$f'(x) = \frac{(e^{x}+e^{-x} - (e^{x}-e^{-x}))(e^{x}+e^{-x}+e^{x}-e^{-x})}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{-x} \times 2e^{x}}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{4e^{x} \times e^{-x}}{(e^{x}+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

Exercice 4 *Dérivée d'une composition avec une fonction affine*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-4x+5}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. Soit x un réel, déterminer une expression de $f'(x)$. Mettre en évidence la propriété appliquée.
2. Déterminer l'abscisse x d'un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ où sa tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -4x$.

1) Pour tout réel x :

$$f(x) = e^{-4x+5} = v(-4x+5)$$

où $v(X) = e^X$ dérivable sur $\mathbb{R}$

D'après le cours de Première, f dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = -4 \times v'(-4x+5)$$

or $v'(X) = e^X$

donc $f'(x) = -4 \times e^{-4x+5}$

2) La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x est parallèle à la droite d'équation $y=-4x$ ssi $f'(x) = -4$

$$f'(x) = -4 \iff -4e^{-4x+5} = -4$$

$$\iff e^{-4x+5} = 1 \iff e^{-4x+5} = e^0$$

$f'(x) = -4 \iff -4x + 5 = 0$

$f'(x) = -4 \iff x = \frac{5}{4}$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = -4x$ au point d'abscisse $\frac{5}{4}$.

Exercice 5 *Dérivée d'une composition avec fonction affine*

Chaque fonction f est dérivable sur l'intervalle I et on note f' sa fonction dérivée. Déterminer une expression de $f'(x)$ pour x appartenant à I.

1. $f : x \mapsto (4x+3)^2$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x-3)^3}$ et $\mathrm{I} =]3/2\,;+\infty[$
3. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x+3}$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$
4. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x+3}(5-x)$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$
5. $f : x \mapsto \sqrt{4x+1}$ et $\mathrm{I} =]-1/4\,;+\infty[$
6. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x+3}(5-x)^2$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

Dans tous les cas on écrit :

$f(x) = v(mx+p)$ avec v dérivable

et on a $f'(x) = m\,v'(mx+p)$

1) $f(x) = v(4x+3)$

avec $v(X) = X^2$ et $v'(X) = 2X$

donc $f'(x) = 4 \times v'(4x+3)$

$f'(x) = 4 \times 2 \times (4x+3)$

2) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-3)^2} = (2x-3)^{-2}$

avec $v(X) = X^{-2}$ et $v'(X) = -2X^{-3}$

donc $f'(x) = 2 \times (-2) \times (2x-3)^{-3}$

$f'(x) = \dfrac{-4}{(2x-3)^3}$

3) $f(x) = v(-2x+3)$

avec $v(X) = e^X$ et $v'(X) = e^X$

donc $f'(x) = -2 \times v'(-2x+3)$

$f'(x) = -2 \times e^{-2x+3}$

5) $f(x) = u(4x+1)$

avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

donc $f'(x) = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{4x+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$

6) $f(x) = a(x) \times b(x)$

avec $a(x) = e^{-2x+3}$ et $b(x) = (5-x)^2$

et $a'(x) = -2e^{-2x+3}$ et $b'(x) = (-1) \times 2(5-x)$

$(ab)' = a'b + ab'$

donc $f'(x) = -2e^{-2x+3} \times (5-x)^2 + e^{-2x+3} \times (-2)(5-x)$

$f'(x) = -2e^{-2x+3} (5-x)(5-x+1)$

$f'(x) = -2e^{-2x+3} (5-x)(6-x)$

Exercice 6 *Dérivée seconde*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 - \dfrac{x}{e^x}$

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f'' sa fonction dérivée. Déterminer $f''(x)$ pour tout réel x.

1) Pour tout réel x on a :

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}$$

or $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$

donc $f(x) = x + 1 - x e^{-x}$

donc $f'(x) = 1 - (1 \times e^{-x} - x e^{-x})$

$$f'(x) = 1 - e^{-x}(1 - x)$$

2) Pour tout réel x, on a :

$f'(x) = 1 - u(x) \times v(x)$

avec $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = 1 - x$

$u'(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = -1$

$(1 - u \times v)' = 0 - (u'v + uv')$

donc $f''(x) = -\left(-e^{-x} \times (1 - x) + e^{-x} \times (-1)\right)$

$f''(x) = e^{-x}(1 - x + 1) = e^{-x}(2 - x)$

Exercice 7 *Dérivée d'une fonction composée*

Chaque fonction f est dérivable sur l'intervalle I et on note f' sa fonction dérivée. Déterminer une expression de $f'(x)$ pour x appartenant à I.

1. $f : x \mapsto 3e^{1-x^2}$ et $I = \mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto \sqrt{1+e^x}$ et $I = \mathbb{R}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ et $I = \mathbb{R}$
4. $f : x \mapsto (5x^2 - 3x + 1)^4$ et $I = \mathbb{R}$
5. $f : x \mapsto e^{x^2-6x+1}$ et $I = \mathbb{R}$
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(3x^2+x+1)^2}$ et $I = \mathbb{R}$

1) $f(x) = 3e^{u(x)}$

avec $u(x) = 1 - x^2$ et $u'(x) = -2x$

on a $(3e^u)' = 3u'e^u$

donc $f'(x) = 3 \times (-2x) \times e^{1-x^2}$

$f'(x) = -6x\,e^{1-x^2}$

2) $f(x) = \sqrt{u(x)}$

avec $u(x) = 1 + e^x$ et $u'(x) = e^x$

on a $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

donc $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$

3) $f(x) = \frac{1}{u(x)}$

avec $u(x) = 1 + e^{-x}$ et $u'(x) = -e^{-x}$

on a $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

donc $f'(x) = \frac{-(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

4) $f(x) = u^4(x)$

avec $u(x) = 5x^2 - 3x + 1$ et $u'(x) = 10x - 3$

on a $(u^4)' = 4u'u^{4-1}$

donc $f'(x) = 4 \times (10x-3)(5x^2 - 3x + 1)^3$

5) $f(x) = e^{u(x)}$

avec $u(x) = x^2 - 6x + 1$ et $u'(x) = 2x - 6$

on a $(e^u)' = u' e^u$

donc $f'(x) = (2x-6)e^{x^2-6x+1}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{u^2(x)}$

avec $u(x) = 3x^2+x+1$ et $u'(x) = 6x+1$

On a $\dfrac{1}{u^2} = u^{-2}$

et $(u^{-2})' = -2\,u'\,u^{-2-1}$

$$(u^{-2})' = -\frac{2u'}{u^3}$$

donc $f'(x) = -2 \times \dfrac{6x+1}{(3x^2+x+1)^3}$

Exercice 8 *Dérivée d'un produit de fonctions composées*

Chaque fonction f est dérivable sur l'intervalle I et on note f' sa fonction dérivée. Déterminer une expression de $f'(x)$ pour x appartenant à I.

1. $f : x \mapsto (4x+1)e^{x^2+1}$ et $I = \mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto (x-4)\sqrt{1+x^2}$ et $I = \mathbb{R}$
3. $f : x \mapsto xe^{\sqrt{x}}$ et $I =]0;+\infty[$
4. $f : x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$ et $I =]0;+\infty[$

1) $f(x) = v(x) \times e^{u(x)}$

avec $v(x) = 4x+1$ $\quad v'(x) = 4$

$u(x) = x^2+1$ $\quad u'(x) = 2x$

On a $(v \times e^u)' = v' \times e^u + v \times (e^u)'$

$$(v\times e^{u})' = v'\times e^{u} + v u' e^{u}$$

$$(v\times e^{u})' = e^{u}\,(v' + v u')$$

donc $f'(x) = e^{x^2+1}\left(4 + (4x+1)\times 2x\right)$

$$f'(x) = (8x^2 + 2x + 4)\,e^{x^2+1}$$

2) $f(x) = v(x)\times\sqrt{u(x)}$

avec $v(x) = x-4$ et $u(x) = 1+x^2$

$v'(x) = 1$ et $u'(x) = 2x$

on a $(v\times\sqrt{u})' = v'\times\sqrt{u} + v\times\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

donc $f'(x) = 1\times\sqrt{1+x^2} + (x-4)\times\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$

$$f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{(x-4)x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}^{\,2} + x(x-4)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x^2+x^2-4x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{\sqrt{1+x^2}}$$

3) $f(x) = v(x)\, e^{u(x)}$

avec $v(x) = x$ et $u(x) = \sqrt{x}$

$v'(x) = 1$ et $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

on a $(v \times e^u)' = v' \times e^u + v \times u' \times e^u$

donc $f'(x) = 1 \times e^{\sqrt{x}} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}^2}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \times \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

4) $f(x) = v(x) \times e^{u(x)}$

avec $v(x) = x$ et $u(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 1$ et $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

On a $(v \times e^u)' = v' e^u + v \times u' \times e^u$

donc $f'(x) = 1 \times e^{\frac{1}{x}} + x \times \frac{-1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}} \times \frac{x-1}{x}$

Exercice 9 *Dérivée d'un quotient de fonctions composées*

1. Soit f définie pour tout réel $x > 0$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$. f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Soit x un réel strictement positif, déterminer $f'(x)$ sous la forme d'un quotient.
2. Soit g définie pour tout réel $x > 0$ par $g(x) = \dfrac{e^{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
   Soit x un réel strictement positif, déterminer $g'(x)$ sous la forme d'un quotient.

1) Pour tout $x > 0$:

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec u et v dérivables

avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = \sqrt{x}$

$u'(x) = e^x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{e^x \times \sqrt{x} - e^x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}$

$$f'(x) = e^x \times \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$f'(x) = e^x \times \frac{2\sqrt{x}^2 - 1}{2x\sqrt{x}} = e^x \times \frac{2x-1}{2x\sqrt{x}}$$

2) Pour tout $x > 0$.

$$g(x) = \frac{e^{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{e^u}{\sqrt{u}}$$

avec $u(x) = x^2+1$ et $u'(x) = 2x$

$$\left(\frac{e^u}{\sqrt{u}}\right)' = \frac{(e^u)' \times \sqrt{u} - (\sqrt{u})' \times e^u}{\sqrt{u}^2}$$

$$\left(\frac{e^u}{\sqrt{u}}\right)' = \frac{u' e^u \times \sqrt{u} - \frac{u'}{2\sqrt{u}} \times e^u}{u}$$

$$= u' \times e^u \times \frac{\sqrt{u} - \frac{1}{2\sqrt{u}}}{u}$$

$$\left(\frac{e^u}{\sqrt{u}}\right)' = u' \times e^u \times \frac{2u-1}{2u\sqrt{u}}$$

donc

$$f'(x) = (2x+1)\, e^{x^2+1} \times \frac{2(x^2+1)-1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = (2x+1)\, e^{x^2+1} \frac{2x^2+1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$