Correction de la fiche d'exercices sur les équations différentielles

Exercice 1 *Vérifier si une fonction est solution d'une équation différentielle*

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on a $f(x) = 5xe^{-x}$.
La fonction f est-elle solution de l'équation différentielle $y' + y = 5e^{-x}$?

Pour tout réel x, on a :

$f(x) = u(x) \times v(x)$ avec u et v dérivables sur $\mathbb{R}$

$u(x) = 5x \qquad v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 5 \qquad v'(x) = -e^{-x}$

$f' = u' \times v + u v'$

donc $f'(x) = 5e^{-x} + 5x \times (-e^{-x})$

$f'(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x}$

donc $f'(x) + f(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} + 5xe^{-x} = 5e^{-x}$

donc f solution de l'équation différentielle

$y' + y = 5e^{-x}$

Exercice 2 *Équations différentielles $y' = ay$ avec a constante*

1. Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations différentielles suivantes qui a pour inconnue une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. $y' = 3y$ **b.** $y' + 6y = 0$ **c.** $3y' - 2y = 0$ **d.** $4y' + 5y = 6y + 8y'$

2. Dans chaque cas, on donne une équation différentielle d'inconnue une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'unique solution f qui vérifie la condition fixée.

a. $\begin{cases} y' = -10y \\ f(0) = 4 \end{cases}$. **b.** $\begin{cases} 2y' - 3y = 2y + 3y' \\ f(0) = \pi \end{cases}$. **c.** $\begin{cases} y' + \sqrt{3}y = 0 \\ f(\sqrt{3}) = 5 \end{cases}$. **d.** $\begin{cases} y' = -3y + 7 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

1) On applique directement la propriété du cours :

a) Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f : x \longmapsto Ce^{3x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

b) Les solutions de l'équation différentielle $y' + 6y = 0 \iff y' = -6y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f : x \longmapsto Ce^{-6x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

c) Les solutions de l'équation différentielle $3y' - 2y = 0 \iff y' = \frac{2}{3}y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f : x \longmapsto Ce^{\frac{2}{3}x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

1) Les solutions de l'équation différentielle
$4y' + 5y = 6y + 8y' \iff y' = -\frac{1}{4}y$
sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :
$$f : x \mapsto Ce^{-\frac{1}{4}x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$
2)
a) Une solution de l'équation différentielle :
$$y' = -10y$$
est une fonction définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = Ce^{-10x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$
Si de plus on a $f(0) = 4$ alors :
$$f(0) = 4 \iff Ce^{-10\times 0} = 4 \iff C = 4$$
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4e^{-10x}$
est donc l'unique solution du système différentiel $\begin{cases} y' = -10y \\ f(0) = 4 \end{cases}$

b) Une solution de l'équation différentielle :

$$2y' - 3y = 2y + 3y' \iff y' = -5y$$

est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = Ce^{-5x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Si de plus on a $f(0) = \pi$ alors :

$$f(0) = \pi \iff Ce^{-5\times 0} = \pi \iff C = \pi$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \pi e^{-5x}$ est donc l'unique solution du système différentiel $\begin{cases} y' = -5y \\ f(0) = \pi \end{cases}$

c) Une solution de l'équation différentielle :

$$y' + \sqrt{3}y = 0 \iff y' = -\sqrt{3}y$$

est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = Ce^{-\sqrt{3}x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Si de plus on a $f(\sqrt{3}) = 5$ alors :

$$f(\sqrt{3}) = 5 \iff Ce^{-3} = 5 \iff C = 5e^{3}$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{3}e^{-\sqrt{3}x}$ est donc l'unique solution du système différentiel $\begin{cases} y' = -\sqrt{3}y \\ f(\sqrt{3}) = 5 \end{cases}$

d) Une solution de l'équation différentielle :

$$y' = -3y + 7$$

est une fonction définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = Ce^{-3x} + \frac{7}{3} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Si de plus on a $f(0) = 1$ alors :

$$f(0) = 1 \iff C + \frac{7}{3} = 1 \iff C = -\frac{4}{3}$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{4}{3} e^{-3x} + \frac{7}{3}$ est donc l'unique solution du système différentiel $\begin{cases} y' = -3y + 7 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 3 *Équation différentielle $y' = ay + b$ avec a et b constantes*

1. On considère l'équation différentielle (E_1) : $y' = y - 3$ d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

- **a.** Déterminer une solution particulière constante de l'équation (E_1).
- **b.** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_1') : $y' = y$.
- **c.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E_1).

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_2), d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$(E_2) : 14y' - 2y = 13y' + 6y + 10$$

3. On considère l'équation différentielle (E_3) : $4y' - 5y = 3$ d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'unique solution f de (E_3) qui vérifie la condition $f(3) = -2$.

1) a) Soit $f : x \mapsto k$ une fonction constante sur $\mathbb{R}$ solution de $y' = y - 3$.

Pour tout réel x, on a donc :

$$f'(x) = f(x) - 3 \iff 0 = k - 3 \iff k = 3$$

Donc $f : x \mapsto 3$

b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = y$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par : $g : x \mapsto Ce^{x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

c) Les solutions de l'équation différentielle

$$y' = y - 3$$

sont obtenues par superposition d'une solution de l'équation homogène $y' = y$ et d'une solution particulière de $y' = y - 3$

Elles sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto Ce^{x} + 3 \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

2) Soit l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E_2) : 14y' - 2y = 13y' + 6y + 10$$

$$(E_2) \iff y' = 8y + 10 \iff \begin{cases} y' = ay + b \\ a = 8 \quad b = 10 \end{cases}$$

D'après un théorème les solutions de (E_2) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

$$f : x \mapsto Ce^{8x} - \frac{10}{8}$$

3) Soit l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E_3) : 4y' - 5y = 3 \iff y' = \frac{5}{4}y + \frac{3}{4}$$

$$\iff \begin{cases} y' = ay + b \\ a = \frac{5}{4} \quad b = \frac{3}{4} \end{cases}$$

D'après un théorème les solutions de (E_3) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto Ce^{\frac{5}{4}x} - \frac{3}{5} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Si de plus $f(3)=-2$ alors :

$$Ce^{\frac{15}{4}}-\frac{3}{5}=-2 \iff Ce^{\frac{15}{4}}=-\frac{7}{10}$$

$$\iff C=-\frac{7}{10}\times e^{-\frac{15}{4}}$$

L'unique solution de (E_3) vérifiant $f(3)=-2$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto -\frac{7}{10}e^{-\frac{15}{4}}e^{\frac{5}{4}x}-\frac{3}{5}$$

Exercice 4 Équation différentielle $y' = ay + h$ avec h fonction

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
   Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.
   Résoudre l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

1) u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$u(x) = x e^{-x} = v(x) \times w(x)$$

$v(x) = x \qquad w(x) = e^{-x}$

$v'(x) = 1 \qquad w'(x) = -e^{-x}$

$$(v \times w)' = v'w + wv'$$

donc $u'(x) = 1 \times e^{-x} + x(-e^{-x})$

donc $u'(x) + u(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$

donc u est solution de l'équation différentielle $y' + y = e^{-x}$

2) Les solutions de l'équation différentielle

$y'+y=0 \iff y'=-y$

sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Ce^{-x}$ avec $C\in\mathbb{R}$

3) Les solutions de l'équation différentielle

$$y'+y=e^{-x}$$

sont obtenues par superposition d'une solution de l'équation homogène $y'+y=0$ et d'une solution particulière $y'+y=0$

Ce sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=Ce^{-x}+xe^{-x} \quad \text{avec } C\in\mathbb{R}$$

4) Soit g une fonction solution de

$y'+y=e^{-x}$ c'est-à-dire que g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=Ce^{-x}+xe^{-x}$

On a $g(0)=C\times e^{-0}+0\times e^{-0}=C$

Si $g(0)=2$ alors $C=2$

L'unique solution g du système différentiel $\begin{cases} y'+y=e^{-x} \\ g(0)=2 \end{cases}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2e^{-x}+xe^{-x}$

Exercice 5 *Modèle de Verhulst, changement d'inconnue*

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.
Au début de l'épidémie on constate que 0,01 % de la population est contaminé.
Pour t appartenant à $[0;30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.
On a donc $y(0) = 0,01$.
On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0;30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0,05y(10-y)$$

Cette équation traduit un modèle de dynamique de population développé par Pierre-François Verhulst vers 1840.

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle $[0;30]$ par $z = \frac{1}{y}$.

   Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions : $\begin{cases} y(0) = 0,01 \\ y' = 0,05y(10-y) \end{cases}$

   si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0,5z + 0,05 \end{cases}$

2. **a.** Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $z' = -0,5z + 0,05$.

   b. Déterminer une expression de la fonction z qui est la solution de l'équation (E) vérifiant $z(0) = 100$.

   c. En déduire une expression de la fonction y.

   d. Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours.
   On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Soit y fonction strictement positive et dérivable sur $[0;30]$ telle que :

$$\begin{cases} y' = 0,05y(10-y) \\ y(0) = 0,01 \end{cases}$$

Posons $z = \frac{1}{y}$, on a : $z' = \frac{-y'}{y^2}$

et donc :

$$\begin{cases} y' = 0,05y(10-y) \\ y(0) = 0,01 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{y'}{y^2} = 0,05\left(\frac{10}{y} - 1\right) \\ z(0) = \frac{1}{0,01} = 100 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -z' = 0,05(10z - 1) \\ z(0) = 100 \end{cases} \iff \begin{cases} z' = -0,5z + 0,05 \\ z(0) = 100 \end{cases}$$

2) a) $z' = -0{,}5z + 0{,}05 \iff \begin{cases} z' = az + b \\ a = -0{,}5 \quad b = 0{,}05 \end{cases}$

D'après un théorème les fonctions solutions de cette équation différentielle sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

$$f(x) = Ce^{-0{,}5x} + 0{,}1 \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

b) Soit z solution de $z' = -0{,}5z + 0{,}05$

c'est-à-dire que z définie sur $\mathbb{R}$

par : $z(x) = Ce^{-0{,}5x} + 0{,}1$

Si de plus $z(0) = 100$ alors on a :

$z(0) = 100 \iff 100 = C + 0{,}1 \iff C = 99{,}9$

L'unique solution du système différentiel

$\begin{cases} z' = -0{,}5z + 0{,}05 \\ z(0) = 100 \end{cases}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$

par : $z(x) = 99{,}9\, e^{-0{,}5x} + 0{,}1$

c) Puisqu'on a défini z comme l'inverse de y (ou quantité strictement positive), on déduit de l'équivalence établie en 1) entre les deux systèmes différentiels et de la résolution du système différentiel de solution z en 2) b) que y est définie sur $[0;30]$ par :

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{99,9e^{-0,5x}+0,1}$$

d) le pourcentage de la population infectée après 30 jours est

$$y(30) = \frac{1}{99,5\times e^{-0,5\times 30}+0,1} \simeq 10\%$$

Exercice 6 *Changement d'inconnue*

On considère l'équation différentielle définie pour les fonctions y dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$(E) \quad : \quad y'(x) = 4 - \big(y(x)\big)^2 \ \text{ pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0\,;\,+\infty[$$

On admet qu'il existe une unique solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 0$.
On considère une solution y de l'équation différentielle (E).
On admet que pour tout réel $x \in [0;\,+\infty[$, on a $y(x) \neq 2$.
On définit alors la fonction z dérivable sur $[0;\,+\infty[$, telle que pour tout réel $x \in [0;\,+\infty[$, on a :

$$z(x) = \frac{2 + y(x)}{2 - y(x)}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \in [0;\,+\infty[$, on a l'équivalence $z'(x) = 4z(x) \Longleftrightarrow y'(x) = 4 - \big(y(x)\big)^2$.
2. Déduire de la question précédente qu'une solution y de l'équation différentielle (E) a pour expression $y(x) = 2\dfrac{Ce^{4x} - 1}{Ce^{4x} + 1}$ avec C constante réelle.
3. Déterminer l'expression de la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

1) Pour tout réel $x \in [0;+\infty[$, on pose :

$z(x) = \dfrac{2+y(x)}{2-y(x)}$ avec y dérivable sur $[0;+\infty[$ et toujours différent de 2

donc $z'(x) = \dfrac{y'(x)(2-y(x)) - (-y'(x)) \times (2+y(x))}{(2-y(x))^2}$

$z'(x) = \dfrac{2y'(x) - y'(x)y(x) + 2y'(x) + y'(x)y(x)}{(2-y(x))^2}$

$z'(x) = \dfrac{4y'(x)}{(2-y(x))^2}$

donc :

$z'(x) = 4z(x) \Longleftrightarrow \dfrac{4y'(x)}{(2-y(x))^2} = 4 \times \dfrac{2+y(x)}{2-y(x)}$

$z'(x) = 4z(x) \iff 4y'(x) = 4 \times \frac{2+y(x)}{2-y(x)} \times (2-y(x))^2$

$z'(x) = 4z(x) \iff 4y'(x) = 4 \times (2+y(x))(2-y(x))$

$z'(x) = 4z(x) \iff y'(x) = 4 - y^2(x)$

L'équivalence est donc prouvée

2) Les solutions de l'équation différentielle $z' = 4z$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$z(x) = Ce^{4x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

D'après 1) y solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = 4 - y^2(x)$

si et seulement si z définie par $z(x) = \frac{2+y(x)}{2-y(x)}$ est solution

de $z' = 4z$ c'est-à-dire de la forme

$z(x) = Ce^{4x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Donc pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$Ce^{4x} = \frac{2+y(x)}{2-y(x)}$$

ce qui équivaut à $Ce^{4x}(2-y(x)) = 2+y(x)$

ce qui équivaut à $2Ce^{4x}-2 = y(x)(1+Ce^{4x})$

ce qui équivaut à $y(x) = \frac{2(Ce^{4x}-1)}{1+Ce^{4x}}$

3) Soit f solution de l'équation différentielle (E) donc de la forme :

$$f(x) = 2 \times \frac{Ce^{4x}-1}{Ce^{4x}+1}$$

Or de plus $f(0)=0$ alors :

$$0 = 2\times\frac{C-1}{C+1} \iff C=1$$

L'unique solution f du système différentiel

$\begin{cases} y' = 4-y^2 \\ f(0)=0 \end{cases}$ est donc définie

sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 2\times\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$