Histoire 1

C'est dans son traité sur le *triangle arithmétique*, publié à titre posthume, que Blaise Pascal (1588 - 1651) énonce pour la première fois, dans le cadre de l'arithmétique,le **principe du raisonnement par récurrence** ou **principe d'induction**. Giuseppe Peano(1858-1932), mathématicien italien dont les travaux les plus connus ont porté sur les fondements de la logique et la théorie des ensembles, prend comme axiome le **principe d'induction** pour construire l'ensemble des entiers naturels :« *Si un ensemble E de nombres contient 0 et le successeur de tout nombre de E, alors tout nombre est dans E* ».

1 Suite numérique

Définition 1

Une suite est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
Si u est le nom de la suite, l'image de n par u se note $u(n)$ (notation fonctionnelle) ou de manière plus usuelle u_n (notation indicielle).
L'ensemble des termes de la suite se note alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Capacité 1 ***Modéliser une situation par une suite***

Une balle en caoutchouc est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur de 2 mètres au-dessus du sol.
Le choc n'étant pas parfaitement élastique, la balle rebondit jusqu'à une hauteur de 1,60 mètre et continue à rebondir, en atteignant après chaque rebond une hauteur égale au $\dfrac{4}{5}$ de la hauteur du rebond précédent.
On modélise les hauteurs atteintes par la balle par une suite (h_n) où pour tout entier naturel n, h_n est la hauteur, exprimée en mètres, atteinte par la balle au n-ième rebond. On a alors $h_0 = 2$.

1. **a.** Calculer h_1 et h_2.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer h_{n+1} en fonction de h_n.

c. En déduire la nature de la suite (h_n). Préciser ses caractéristiques.

d. Déterminer le sens de variation de la suite (h_n).

2. Déterminer le nombre minimal N de rebonds à partir duquel la hauteur atteinte par la balle est inférieure à 20 cm. Expliquer la démarche employée.

2 Suites et ordre

2.1 Ordre et opérations

Propriété 1 ***Miscellanées de propriétés sur l'ordre***

1. *Compatibilité de l'ordre sur les réels avec les opérations arithmétiques de base*

   - Pour tous réels x, y et z, si $x \leqslant y$ alors $x + z \leqslant y + z$
   - Pour tous réels x, y et z, si $x \leqslant y$ et $z > 0$ alors $xz \leqslant yz$, et si $x < y$ et $z > 0$ alors $xz < yz$
   - Pour tous réels x, y et z, si $x \leqslant y$ et $z < 0$ alors $xz \geqslant yz$ et si $x < y$ et $z < 0$ alors $xz > yz$
   - Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$
   - Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$

2. *Généralisation aux fonctions monotones sur un intervalle*

   Une fonction f fonction définie sur un intervalle I est **monotone** (à ne pas confondre avec **constante**) si son sens de variation (**croissant** ou **décroissant**) est fixé sur I.

   - f est **croissante** sur I si et seulement si :
     pour tous réels a et b dans I, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ *conserve l'ordre*
   - f est **décroissante** sur I si et seulement si :
     pour tous réels a et b dans I, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$ *inverse l'ordre.*

3. *Échelle des puissances.*

   - Pour tout réel x tel que $0 < x < 1$ on a $0 < x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < 1$.
   - Pour tout réel x tel que $1 < x$ on a $1 < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3$.
   - Pour tout entier $n \geqslant 1$:
     - Si $0 < x < 1$ alors $0 < x^n \leqslant x < 1$.
     - Si $1 < x$ alors $1 < x \leqslant x^n$.

Capacité 2 ***Comparer avec les propriétés sur l'ordre des réels***

1. Soit n un entier naturel, comparer $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,5^n}}$ et $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,6^n}}$.
2. Soit x un réel positif, discuter de l'ordre de e^{-x}, e^{-x^2} et $\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ selon les valeurs de x.

2.2 Suite majorée, minorée ou bornée

Définition 2

On considère une suite réelle u définie sur $\mathbb{N}$.

- Une suite réelle u est **majorée** par la constante M, appelée **majorant** de u, si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant M$.
- Une suite réelle u est **minorée** par la constante m, appelée **minorant** de u, si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant M$.

- Une suite réelle u qui est **minorée** et **majorée**, est dite **bornée**.

Capacité 3 ***Démontrer qu'une suite est bornée***

1. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{\cos(n)}{1+\mathrm{e}^n}$.

   a. Démontrer que u est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

   b. Démontrer que u est bornée.

2. *Métropole 2024 J1* On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

   Peut-on affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$?

2.3 Sens de variation d'une suite

Définition 3

On considère une suite réelle u définie sur $\mathbb{N}$.

- Une suite réelle u est **croissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite réelle u est **décroissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite réelle u est **constante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} = u_n$.

Corollaire ***admis***

- Si une suite u est **croissante** à partir du rang p alors pour tout couple d'entiers (n, m) avec $p \leqslant n \leqslant m$, on a $u_p \leqslant u_n \leqslant u_m$.
- Si une suite u est **décroissante** à partir du rang p alors pour tout couple d'entiers (n, m) avec $p \leqslant n \leqslant m$, on a $u_p \geqslant u_n \geqslant u_m$.

Remarque 1

Une suite croissante (respectivement décroissante) à partir de son premier rang, est dite croissante (respectivement décroissante).

Capacité 4 ***Utiliser le sens de variation d'une suite***

On considère une suite réelle u définie sur $\mathbb{N}$.

1. Démontrer que si u est décroissante alors elle est majorée.

2. Démontrer que si u est croissante alors elle est minorée.

3. Démontrer que la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2.4 Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite

Méthode

Il existe plusieurs méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite u.

- Si le terme général de u est donné par une formule explicite $u_n = f(n)$ et s'il existe un entier naturel p tel que f monotone sur $[p\,;+\infty[$ alors :
  - u est décroissante à partir du rang p si f décroissante sur $[p\,;+\infty[$.
  - u est croissante à partir du rang p si f croissante sur $[p\,;+\infty[$.
- On peut étudier le **signe de la différence** $u_{n+1} - u_n$ et démontrer qu'il existe un rang p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n$ est de signe constant.
  - Si « $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ » alors u est décroissante à partir du rang p.
  - Si « $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ » alors u est croissante à partir du rang p.
- On peut aussi utiliser un **raisonnement par récurrence**.

Capacité 5 ***Choisir une méthode adaptée pour étudier le sens de variation d'une suite***

1. **Méthode 1** : *Si $u_n = f(n)$, étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$*

   Soit la suite u définie pour tout entier $n \geqslant 0$, par $u_n = \dfrac{e^n}{e^n+1}$.

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$. On a pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = f(n)$.

   - Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $f'(x)$.
     ATTENTION, on peut dériver la fonction f mais pas la suite u car celle-ci n'est pas définie sur un intervalle !!!
   - En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$ et le sens de variation de u.

2. **Méthode 2** : *Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$*

   Soit la suite u définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n(1-2u_n)$.

   - Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   - Conclure sur le sens de variation de la suite u.

3 Suites arithmétiques et géométriques

3.1 Suites arithmétiques

Les preuves des propriétés ont été établies en classe de première

Définition 4

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est la raison de la suite.

Propriété 2

Soit u une suite arithmétique de raison r.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + n \times r$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \quad u_p = u_q + (p - q) \times r$$

Théorème 1

Une suite u est arithmétique de raison r si et seulement s'il existe deux réels a et r tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a + nr$$

Une suite est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique dans un repère est constituée de points alignés.

Propriété 3

Soit u une suite arithmétique de raison r.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $q \in \mathbb{N}$ tel que $q \geqslant p$ on a :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{q-1} + u_q = (q-p+1) \times \frac{u_p + u_q}{2} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

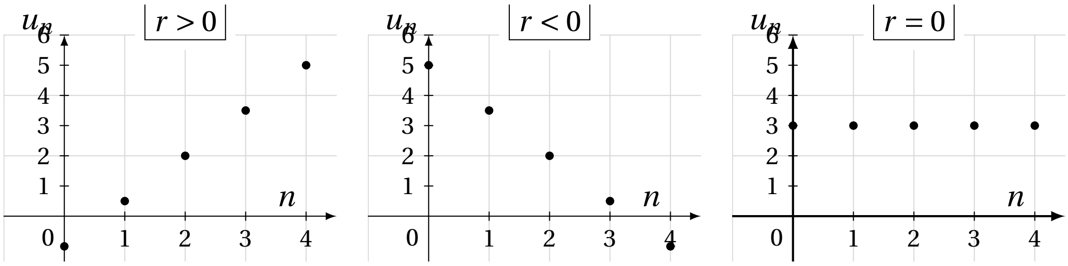
En particulier pour la suite arithmétique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Propriété 4 ***Sens de variation***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

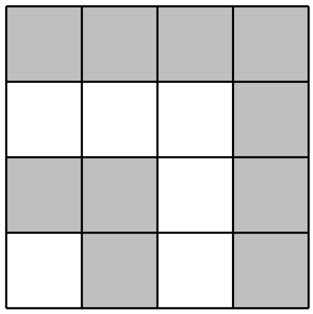
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $r > 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si $r = 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $r < 0$.



Capacité 6 ***Étudier une suite arithmétique***

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ des entiers impairs successifs :

$$u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 5, \ldots$$



1. Justifier que $(u_n)_{n\geqslant 1}$est une suite arithmétique.
2. Soit n un entier naturel positif, exprimer u_n en fonction de n.
3. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} u_k = n^2$.

Capacité 7 ***Étudier le sens de variation d'une suite arithmétique***

Dans chaque cas, u désigne une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$. On donne une expression de son terme général u_n. Déterminer la raison de la suite u et son sens de variation.

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 1 - \dfrac{5-2n}{3}$.
2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = \left| -3-2n \right|$.

3.2 Suites géométriques

Les preuves des propriétés ont été établies en classe de première

Définition 5

Une suite u est géométrique s'il existe un réel q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est la raison de la suite.

Propriété 5

Soit u une suite géométrique de raison q.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad u_m = u_p \times q^{m-p}$$

Propriété 6

Soit u une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Plus généralement, Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geqslant p$ on a :

$$\sum_{k=p}^{m} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{m-1} + u_m = u_p \times \frac{1-q^{m-p+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-raison^{\text{nombre de termes}}}{1-raison}$$

En particulier pour la suite géométrique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n$ avec $q \neq 1$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Propriété 7 ***Sens de variation***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- **Premier cas** $\boxed{u_0 > 0}$.

  Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $\boxed{1 < q}$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $\boxed{0 < q < 1}$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1 si $q = 0$ et à partir du rang 0 si $q = 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone si $\boxed{q < 0}$

- **Deuxième cas** $\boxed{u_0 < 0}$.

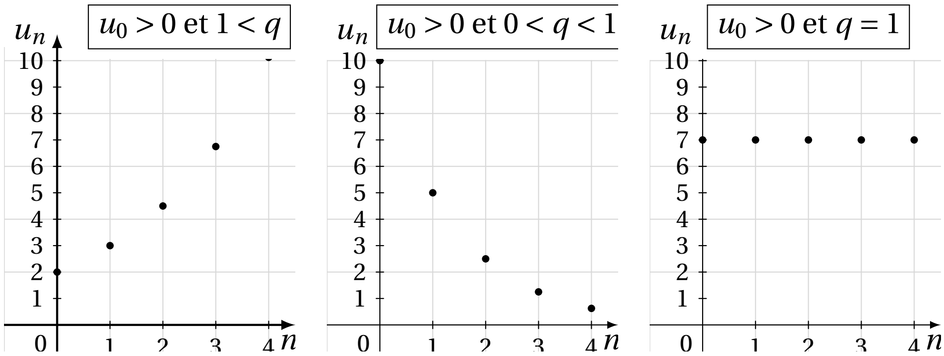
  La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n$ est géométrique de même raison q et de premier terme $v_0 > 0$.

  On applique la propriété précédente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on en déduit par symétrie le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $\boxed{1 < q}$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $\boxed{0 < q < 1}$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1 si $q = 0$ et à partir du rang 0 si $q = 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone si $\boxed{q < 0}$

Les différents cas exposés ci-dessus sont compliqués à retenir. En pratique, la propriété peut se résumer ainsi :

- Si la raison q de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
- Si la raison q de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et son sens de variation est fixé par la comparaison de deux termes consécutifs comme u_0 et u_1.



Capacité 8 *Étudier le sens de variation d'une suite géométrique*

Dans chaque cas, u désigne une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$. On donne une expression de son terme général u_n. Déterminer la raison de la suite u et son sens de variation.

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 0,4 \times 1,5^n$.
2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = -0,4 \times 1,5^n$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 4 \times 0,5^n$.
4. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = -4 \times 0,5^n$.
5. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = \mathrm{e}^{1-n}$.
6. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = \dfrac{(-\mathrm{e}^n)^3}{(-\mathrm{e}^2)^n}$.

4 Raisonnement par récurrence

4.1 Principe du raisonnement par récurrence

Exemple 1

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 8n + 8$.

1. Calculer : $u_1 = \dots\dots\dots\dots$ et $u_2 = \dots\dots\dots\dots$.

2. Compléter :

Algorithme

```
Fonction suiteU(n):
  u ⟵ 1
  Pour k allant de 0 à n−1
    u ⟵ ...
  Retourne u
```

Python

```
def suiteU(n):
    u = 1
    for k in range(0, .....):
        u = ..............
    .......
```

3. Compléter :

n	0	1	2	3	4
u_n	...	...	...	...	...

4. On peut conjecturer que pour tout entier naturel n, on a la propriété $P(n)$: $u_n = \dots\dots\dots$.

Principe du raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour une infinité d'entiers naturels n en trois étapes seulement. Explication avec l'analogie de l'escalier (voir manuel page 12).

Étape	Escalier	Raisonnement par récurrence
Initialisation	Je peux atteindre la marche 0	On vérifie que la propriété $P(0)$ est vraie
Hérédité	Pour un p fixé, si j'ai atteint la marche p alors je peux atteindre la marche suivante $p+1$	Pour un p fixé, si $P(p)$ est vraie alors $P(p+1)$ est vraie.
Conclusion	Pour tout entier $n \geqslant 0$ je peux atteindre la marche n	Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $P(n)$ vraie

Remarque 2

1. La propriété qui permet de déduire la ***Conclusion*** (passage à l'infini) de l'***Initialisation*** et de ***Hérédité*** s'appelle **Axiome de récurrence** car on ne la démontre pas.

2. On peut initialiser un raisonnement par récurrence à partir d'un entier naturel n_0 supérieur à 0, la propriété est alors démontrée pour tout entier $n \geqslant n_0$.

4.2 Axiome de récurrence

Axiome *Axiome de récurrence*

Soit une propriété $\mathrm{P}(n)$ dépendant de l'entier naturel n telle que :

- ***Initialisation*** : $\mathrm{P}(n_0)$ est vraie pour un entier naturel n_0
- ***Hérédité*** : pour un entier $p \geqslant n_0$ fixé, si $\mathrm{P}(p)$ est vraie alors $P(p+1)$ est vraie.

alors la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.

4.3 Exemple de rédaction d'un raisonnement par récurrence

On va démontrer *par récurrence* que l'expression de u_n conjecturée dans l'exemple 1 est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$. On procède en quatre temps :

- Mise en place *On énonce la propriété à démontrer.*

  Pour un entier $n \geqslant 0$, on considère la propriété $\mathrm{P}(n)$: « .... ».

- Initialisation *On vérifie que la propriété est vraie pour une valeur initiale n_0.*

  ....

  ....

- Hérédité *On démontre que si pour un entier $p \geqslant n_0$ fixé, $P(p)$ est vraie alors $P(p+1)$ est vraie.*

  On formule d'abord **l'hypothèse de récurrence** : soit un entier $p \geqslant n_0$ **fixé** tel que $P(p)$ est vraie.

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  On en déduit que $\mathrm{P}(p+1)$ est aussi vraie.

  Ceci prouve **l'hérédité de la propriété.**

- Conclusion

  La propriété $\mathrm{P}(n)$ est initialisée pour $n_0 = 0$ et elle est héréditaire donc d'après l'axiome de récurrence elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

Capacité 9 *Démontrer avec un raisonnement par récurrence*

Voir Capacité page 13 du manuel Indice et les exercices 20, 39, 42, 115 et Sujet A.

1. Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2u_n - 5$.

- **a.** Démontrer par récurrence que la suite u est majorée par 5.
- **b.** Démontrer par récurrence que la suite u est décroissante.
- **c.** Quelle propriété pourrait-on démontrer par récurrence pour répondre aux deux questions précédentes ?
- **d.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 5 - 2^{n+2}$.

2. Soit v la suite définie par $v_0 = -1$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 4}$.

- **a.** Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x+4}$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
- **b.** Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

3. Soit u une suite réelle telle que pour tout entier $n \geqslant 0$ on ait $u_{n+1} = u_n^3$.

- **a.** Démontrer que si pour un entier $n \geqslant 0$, on a $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$ alors on a $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
- **b.** Peut-on en déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$?

4. On admet que la fonction f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est n fois dérivable sur $\mathscr{D}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \neq 0$, on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad \text{avec} \quad n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 \text{ et } 0! = 1$$

Table des matières