**Histoire 1**

Inscrit à 18 ans à l'Université de Cambridge, Isaac Newton doit rentrer se confiner au manoir familial lorsque la peste se déclare quatre ans plus tard. En 1665 et 1666, il profite de son inactivité pour inventer l'essentiel des mathématiques et de la physique moderne au cours de son *année miraculeuse* : la théorie de l'optique, la méthode des fluxions, la théorie des couleurs et les prémices de la théorie de la gravitation universelle ! Dans son ouvrage posthume (1740) « La méthode des fluxions » il distingue deux classes de problèmes :

- Problème I : « *Étant donnée la relation des quantités fluentes ($y$ et $x$), trouver la relation de leurs fluxions ($\mathring{x} = dx$ et $\mathring{y} = dy$)* », il s'agit d'un problème de dérivation en langage moderne.
- Problème II : « *Étant donnée la relation des fluxions, trouver celle des quantités fluentes* ». La relation des fluxions, est une relation faisant intervenir des fonctions et leurs dérivées, autrement dit, une équation différentielle en langage moderne. Par exemple il peut s'agir de déterminer la trajectoire d'un objet à partir de sa position initiale et de la loi de sa vitesse.

*Source :* *Bernard Ycart :* https://hist-math.fr/newtona-auto#.

# 1 Équation différentielle

## 1.1 Équation dont l'inconnue est une fonction

**Activité 1** ***Activité Construction de l'exponentielle par la méthode d'Euler***

## 1.2 Équation différentielle

**Définition 1**

- Une **équation différentielle** est une équation définie sur un intervalle I où l'inconnue est une fonction dérivable sur I et où interviennent des dérivées de cette fonction.
- **Résoudre** une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble des fonctions solutions de l'équation.
- Une convention usuelle est de noter $y$ la fonction inconnue d'une équation différentielle et $y'$, $y''$ etc ... ses dérivées successives.

  De plus dans l'écriture d'une équation différentielle, on omet généralement $x$ pour les fonctions $y$ et $y'$. Ainsi l'équation définie pour une fonction $y$ dérivable sur $\mathbb{R}$ par $y'(x) = 2y(x) + x - 1$ peut s'écrire $y' = 2y + x - 1$.

**Capacité 1** ***Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle***

On considère l'équation différentielle $(E)$ définie pour une fonction $y$ dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E) \; : \; y' - 2y = x - 1$$

1. Vérifier que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$ est solution de l'équation $E$.

2. **a.** Vérifier que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ est solution de l'équation différentielle $(E_0)$ définie pour une fonction $y$ dérivable sur $\mathbb{R}$ par $y' - 2y = 0$.
   L'équation $(E_0)$ est *l'équation homogène* ou *équation avec second membre nul* associée à l'équation $(E)$.

   **b.** Déterminer une autre solution de l'équation différentielle homogène $(E_0)$.

   **c.** Déterminer la solution de l'équation différentielle homogène $(E_0)$ telle que $y(0) = 3$.

3. **a.** Démontrer que la fonction $h = f + g$ est solution de l'équation différentielle $(E)$.

   **b.** Déterminer une autre solution de l'équation différentielle $(E)$.

# 2 Équation différentielle $y' = f$ et primitives d'une fonction

## 2.1 Équation différentielle $y' = f$ et primitive d'une fonction

**Définition 2**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.
Les définitions suivantes sont équivalentes :

- Toute fonction $y$, qui est solution de l'équation différentielle $y' = f$ avec $y$ dérivable sur I, est une **primitive** de la fonction $f$.
- Une fonction $F$ dérivable sur I, telle que pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on a $F'(x) = f(x)$, est une **primitive** de la fonction $f$.

**Capacité 2** ***Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle ⇒ capacité 1 p. 297***

1. Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

   **a.** Vérifier que la fonction $F$ définie sur $R$ par $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 1$ est une primitive de $f$.

   **b.** Déterminer d'autres primitives de la $f$.

2. Compléter le tableau de primitives :

| Fonction $f$ | Intervalle I | Une primitive $F$ parmi une infinité ... |
|---|---|---|
| $f(x) = 1$ | $\mathbb{R}$ | ........................................ |
| $f(x) = x$ | $\mathbb{R}$ | ........................................ |
| $f(x) = 3x - 2$ | $\mathbb{R}$ | ........................................ |
| $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $]0\,;+\infty[$ | ........................................ |
| $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ | $\mathbb{R}$ | ........................................ |

## 2.2 Propriété des primitives

**Propriété 1**

1. Toute fonction $f$ dérivable sur un intervalle I, admet des primitives sur I.
2. Si $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle I et $F$ est une primitive de $f$, alors la fonction $G$ définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ avec $k$ constante réelle, est aussi une primitive de $f$.
3. Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.
4. Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

   Il existe une unique primitive $F$ de $f$ sur $I$ telle que $F(x_0) = y_0$.

   Autrement dit l'équation différentielle $y' = f$ possède une unique fonction solution $F$ définie et dérivable sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

**Démonstration** ***Au programme***

1. L'existence d'une primitive pour une fonction $f$ dérivable sur un intervalle I, sera démontrée dans le chapitre sur le calcul intégral. On démontrera un résultat plus général sur l'ensemble des fonctions continues qui contient l'ensemble des fonctions dérivables : *Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.*
2. 
   - Hypothèses : $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle I, $F$ est une primitive de $f$ et $G$ est définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ avec $k$ constante réelle.
   - Raisonnement :

     ..........................................................................................

     ..........................................................................................

     ..........................................................................................

     ..........................................................................................
   - Conclusion : $G$ est une primitive de $f$.
3. 
   - Hypothèses : $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle I, $F$ et $G$ sont deux primitives de $f$.
   - Raisonnement :

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

- Conclusion : Il existe une constante réelle $k$ telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $F(x) - G(x) = k$.

**4.**
- Hypothèses : Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0$ et $y_0$ deux réels.
- Raisonnement :
  $f$ admet une primitive $G$ sur I : pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on a $G'(x) = f(x)$.
  On raisonne ensuite par Analyse (preuve d'unicité) puis Synthèse (preuve d'existence).
  – Analyse : Soit $F$ une primitive de $f$ telle que $F(x_0) = y_0$. D'après la propriété démontrée précédemment, $F - G$ est une constante $k$. En particulier, on a $k = F(x_0) - G(x_0) = y_0 - G(x_0)$. On en déduit que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$.
  On a démontré l'unicité d'une primitive de $f$ sur I qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$.
  – Synthèse : Soit la fonction $F$ définie sur I par $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$. Pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on a $F'(x) = G'x) = f(x)$ donc $F$ est une primitive de $f$.
  De plus $F(x_0) = G(x_0) + y_0 - G(x_0) = y_0$.
  On a démontré l'existence d'une primitive de $f$ sur I qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$.
- Conclusion : Il existe une unique primitive $F$ de $f$ telle que $F(x_0) = y_0$.

**Capacité 3** ***Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction ⇒ capacité 2 p. 297***

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0;4]$ par $f(x) = (3,6x + 2,4)\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4$.

1. Vérifier que la fonction que la fonction $F$ définie par $F(x) = (-6x - 14)\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4x$ est une primitive de $f$.
2. Déterminer la solution sur $[0;4]$ de l'équation différentielle $y' = f$ qui vérifie $y(0) = 10$.

## 2.3 Recherche de primitives

### 2.3.1 Tableau des primitives des fonctions usuelles

Le tableau 1 page 6 donne, pour chaque fonction $f$ de référence, les fonctions primitives $F$ sur l'intervalle considéré, il s'obtient à partir du tableau des dérivées en vérifiant que $F' = f$.

### Capacité 4 *Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence ⇒ capacité 3 p. 299*

Pour chacune des fonctions $f$ suivantes, dérivables sur I, déterminer l'ensemble des primitives de $f$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. $f(x)=4$ sur $I=\mathbb{R}$ ;
2. $f(x)=0$ sur $I=\mathbb{R}$ ;
3. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I=]0\,;+\infty[$ ;
4. $f(x)=3+x+x^4$ sur $I=\mathbb{R}$ ;
5. $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ sur $I=]0\,;+\infty[$ ;
6. $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}$ sur $I=\mathbb{R}$ ;

#### 2.3.2 Tableau d'opérations sur les primitives

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On a alors les propriétés résumées dans le tableau 2 page suivante. Là encore, les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F'=f$ sur l'intervalle considéré.

### Remarque 1

La fonction $f: t\mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais on ne peut pas donner de forme explicite de celles-ci.

### Capacité 5 *Calculer une primitive de fonction de la forme* $(v'\circ u)\times u'$ *⇒ capacité 4 p. 299*

Pour chacune des fonctions $f$ suivantes, dérivables sur un intervalle $I$, déterminer l'ensemble des primitives de $f$ sur I.

1. $f(x)=x^2-2x-1-\dfrac{1}{x^2}+\mathrm{e}^x$ sur $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$ ;
2. $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)^4$ sur I$\mathbb{R}$ ;
3. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$
4. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{731x}}{(\mathrm{e}^{731x}+1)^2}$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ ;
5. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^3}$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ ;
6. $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}_+^*$ ;
7. $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}+1}$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ ;
8. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+1}}$ sur $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$.

TABLE 1 – Primitives des fonctions usuelles

| Fonction $f$ | Primitive $F$ ($C \in \mathbb{R}$ constante) | Intervalle $I$ |
|---|---|---|
| $f(x) = m$ (constante) | $F(x) = mx + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x$ | $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^2$ | $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^2}$ | $F(x) = -\frac{1}{x} + C$ | $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ |
| Plus généralement : $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$ | $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ | $\mathbb{R}$ (si $n \geqslant 0$) $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ (si $n < -1$) |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $F(x) = 2\sqrt{x} + C$ | $]0\,;+\infty[$ |
| $f(x) = \mathrm{e}^x$ (exponentielle de base e) | $F(x) = \mathrm{e}^x + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ (avec $a \neq 0$) | $F(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b} + C$ | $\mathbb{R}$ |

TABLE 2 – Opérations sur les primitives

| Conditions | $f$ s'écrivant sous la forme | admet comme primitive $F$ (à une constante $C$ près) |
|---|---|---|
| Pour tout $x \in \mathrm{I}$ | $u' + v'$ | $u + v + C$ |
| Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante | $\lambda u'$ | $\lambda u + C$ |
| Pour tout $x \in \mathrm{I}$ | $u'u$ | $\frac{1}{2}u^2 + C$ |
| Pour tout $x \in \mathrm{I}$ | $u'u^2$ | $\frac{1}{3}u^3 + C$ |
| Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \neq 0$ | $\frac{u'}{u^2}$ | $-\frac{1}{u} + C$ |
| Plus généralement : Soit $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq -1$ Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \neq 0$ | $u'u^n$ | $\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$ |
| Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > 0$ | $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u} + C$ |
| Pour tout $x \in \mathrm{I}$ | $u'\mathrm{e}^u$ | $\mathrm{e}^u + C$ |
| Primitive d'une fonction composée avec une fonction affine : soient $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$ | $u'(ax+b)$ | $\frac{1}{a}u(ax+b) + C$ |

# 3 Équations différentielles $y' = ay$ et $y' = ay + f$

## 3.1 Équation différentielle $y' = ay$

**Activité 2 *Activité 3 p.295***

**Théorème 1**
Soit $a$ un réel non nul.
L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ où $C$ est une constante réelle.

**Démonstration *Au programme, voir manuel page 300***

Soit $a$ un réel non nul.
Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ et $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ avec $C$ une constante réelle. Démontrons que $\mathscr{E} = \mathscr{F}$ par double inclusion.

- Démontrons que $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$.
  - Hypothèses : Soit $f$ une fonction qui appartient à $\mathscr{F}$, c'est-à-dire $f : x \mapsto Ce^{ax}$ avec $C$ constante.
  - Raisonnement :

    ...........................................................................................

    ...........................................................................................

    ...........................................................................................
  - Conclusion : $f' = af$ donc $f$ solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$ donc $f \in \mathscr{E}$ et donc $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$.
- Démontrons que $\mathscr{F} \supset \mathscr{E}$.
  - Hypothèses : Soit $f$ une fonction qui appartient à $\mathscr{E}$, c'est-à-dire pour tout réel $x$, $f'(x) = af(x)$.
  - Raisonnement :
    On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)e^{-ax}$.
    Pour tout réel $x$, $g'(x) = \ldots$

    ...........................................................................................

    ...........................................................................................

    ...........................................................................................

    ...........................................................................................
  - Conclusion : Si $f$ appartient à $\mathscr{E}$, alors il existe une constante $C$ telle que $f(x) = Ce^{ax}$ donc $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$.

- On a démontré que $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$ et $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$, donc $\mathscr{F} = \mathscr{E}$.

## Corollaire

Soit $a$, $x_0$ et $y_0$ trois réels.
L'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution $y$ dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

## Démonstration

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

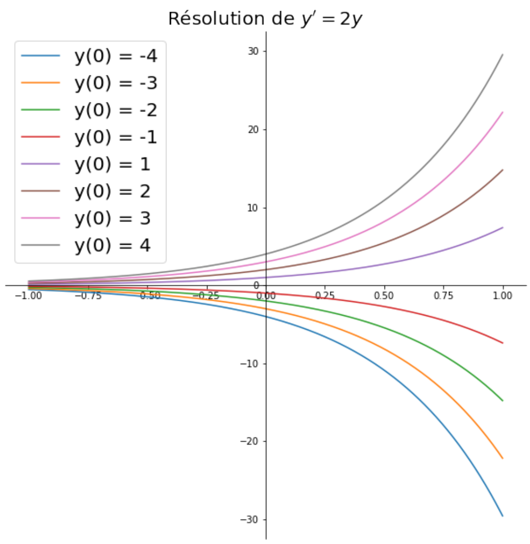
..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

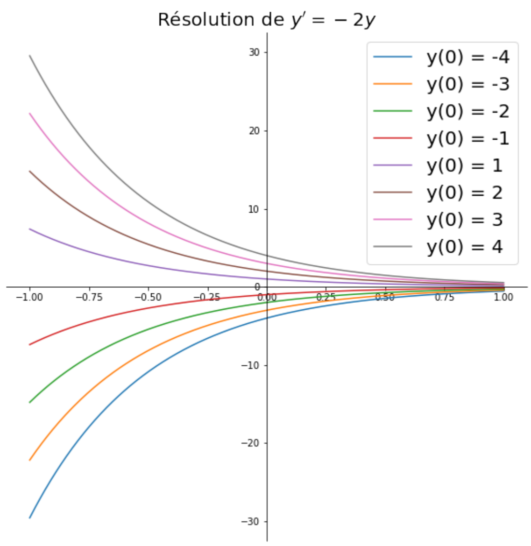
..................................................................................................................................

## Remarque 2

Courbes intégrales de $y' = ay$ avec $a > 0$




Courbes intégrales de $y' = ay$ avec $a < 0$




- Pour un réel $a$ non nul fixé, il existe une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$.

  Les courbes de ces solutions sont appelées *courbes intégrales*.

- Pour un réel $a$ non nul fixé et un couple de valeurs initiales $(x_0, y_0)$ fixé, il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = ay$ telle que $y(x_0) = y_0$.

**Capacité 6** ***Résoudre une équation différentielle $y' = ay$ ⇒ capacité 5 p. 301***

Soit $(E)$ l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $y' - 6y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E)$.
2. Déterminer la solution $f$ de $(E)$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 3$.

## 3.2 Équations différentielles $y' = ay + b$

**Activité 3** ***Activité 4 p.295***

**Définition 3**

Soit $a$ (avec $a \neq 0$ ) et $b$ deux constantes réelles.
L'équation différentielle définie pour une fonction $y$ dérivable sur $\mathbb{R}$ par $y' = ay + b$ est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants**.

**Propriété 2**

Soit $a$ (avec $a \neq 0$) et $b$ deux constantes réelles .
Une solution particulière de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = ay + b$ est la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{b}{a}$.

**Démonstration**

- Hypothèses : Soit $a$ (avec $a \neq 0$) et $b$ deux constantes réelles et soit l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $y' = ay + b$. On considère la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{b}{a}$.
- Raisonnement :

  ..........................................................................................

  ..........................................................................................

- Conclusion :

  La fonction constante $g$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

**Théorème 2**

Soit $a$ (avec $a \neq 0$) et $b$ deux constantes réelles.

1. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $(E)\ :\ y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f_0(x) + g(x)$ où $f_0$ est une solution quelconque de l'équation différentielle $(E_0)\ :\ y' = ay$ et $g$ une solution particulière de l'équation $(E)$.
2. Plus précisément, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $C$ une constante réelle.

## Démonstration *Voir page 302 du manuel*

1. Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = ay + b$.

   On a démontré dans la propriété précédente qu'il existe une solution particulière de $(E)$.

   Notons $g$ une solution particulière de $(E)$ (pas forcément la fonction constante $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$) et $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f_0(x) + g(x)$ avec $f_0$ solution quelconque de l'équation différentielle $(E_0)\ :\ y' = ay$. Démontrons que $\mathscr{E} = \mathscr{F}$ par double inclusion.

   - Démontrons que $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$.
     - Hypothèses : Soit $f$ une fonction qui appartient à $\mathscr{F}$, c'est-à-dire $f : x \mapsto f_0(x) + g(x)$.
     - Raisonnement :
       Pour tout réel $x$, on a $f'(x) = f_0'(x) + g'(x)$.
       Or $f_0$ solution de $(E_0)$ donc $f_0'(x) = af_0(x)$ et $g$ solution de $(E)$ donc $g'(x) = ag(x) + b$.
       Ainsi pour tout réel $x$, on a :
       $$f'(x) = af_0(x) + ag(x) + b = a(f_0(x) + g(x)) + b = af(x) + b$$
     - Conclusion :
       $f' = af + b$ donc $f$ solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay + b$ donc $f \in \mathscr{E}$ et donc $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$.
   - Démontrons que $\mathscr{F} \supset \mathscr{E}$.
     - Hypothèses : Soit $f$ une fonction qui appartient à $\mathscr{E}$, c'est-à-dire pour tout réel $x$, $f'(x) = af(x) + b$ et soit $g$ une solution particulière de l'équation $(E)$.
     - Raisonnement :
       Pour tout réel $x$, $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.
       Or $f$ et $g$ solutions de l'équation $(E)\ :\ y' = ay + b$, donc :
       $$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = af(x) + b - (ag(x) + b) = a(f - g)(x)$$
     - Conclusion :
       $(f - g)' = a(f - g)$ donc $f - g$ solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$ donc $f = g + f - g$ avec $f - g$ solution de $(E_0)\ :\ y = ay'$ donc $f \in \mathscr{E}$ et donc $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$.
   - On a démontré que $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$ et $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$, donc $\mathscr{F} = \mathscr{E}$.

2. On peut appliquer la propriété que nous venons de démontrer :

- avec la solution particulière $g : x \mapsto -\dfrac{b}{a}$ de l'équation $(E)\ :\ y' = ay + b$ (voir propriété 2) ;
- avec la solution générale de l'équation $(E_0)\ :\ y' = ay$ (voir théorème 1).

**Capacité 7** ***Résoudre une équation différentielle*** $y' = ay + b \Rightarrow$ ***capacité 6 p. 301***

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant $t$, où $t$ est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction $v$ ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction $v$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ 10v'(t) + v(t) = 30$$

1. Résoudre l'équation différentielle $(E)$.
2. On suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$. En déduire l'expression de la fonction $v$.

## 3.3 Équations différentielles $y' = ay + h$

**Propriété 3** ***admise***

Soit $a$ un réel et $h$ une fonction définie sur un intervalle I.
L'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = ay + h$ est l'ensemble des fonctions $f$ définies sur I par $f(x) = f_0(x) + g(x)$ où $g$ est une solution particulière de l'équation $(E)$ et $f_0$ une solution quelconque de l'équation $(E_0)\ :\ y' = ay$.

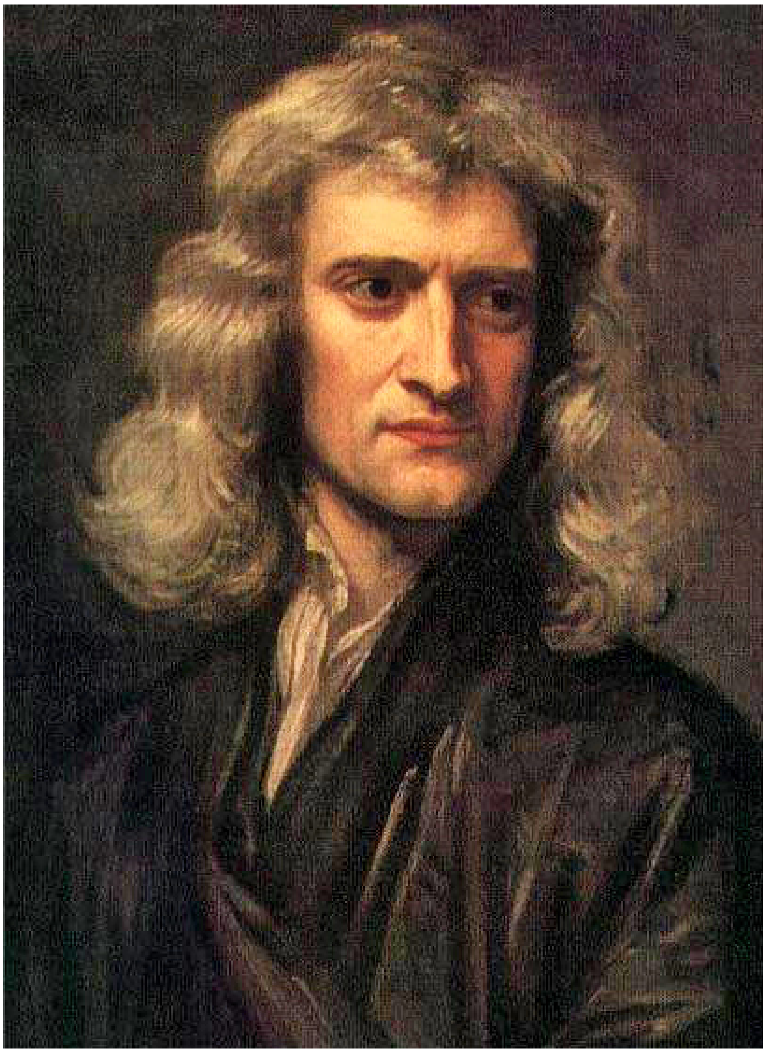
**Capacité 8** ***Résoudre une équation différentielle*** $y' = ay + h \Rightarrow$ ***capacité 6 p. 301***

On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant $t$ exprimé en heures $(t \geqslant 0)$.
On constate expérimentalement que la fonction $g$ est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \qquad y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$$

1. On considère l'équation différentielle $\left(E'\right) : y' + \dfrac{1}{2}y = 0$.
   - **a.** Déterminer le réel $a$ pour que la fonction $u$ définie par l'équation $u(t) = at\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ soit solution de l'équation $(E)$.
   - **b.** Montrer qu'une fonction $v$ est solution de l'équation $(E)$ si, et seulement si, la fonction $h = v - u$ est solution de l'équation $\left(E'\right)$.
   - **c.** Résoudre l'équation $\left(E'\right)$.
   - **d.** En déduire les solutions de l'équation $(E)$.
2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la quantité de principe actif présente dans le sang est nulle.

Déterminer la solution de l'équation différentielle $(E)$ qui vérifie cette condition initiale.



**Isaac Newton (1642 -1727)**

*Au commencement de l'année 1665, je trouvai la méthode des séries approximantes, et la règle pour réduire n'importe quelle puissance d'un binôme en une telle série. La même année en mai, je trouvai la méthode des tangentes de Gregory et Slusius, et en novembre j'eus la méthode directe des fluxions,et l'année suivante en janvier j'eus la théorie des couleurs, et en mai suivant j'eus accès à la méthode inverse des fluxions. Et la même année je commençai à penser à la gravité étendue à l'orbite de la lune.*

# Table des matières