Histoire 1

Il y a 2500 ans environ, Zénon d'Élée énonçait le **paradoxe d'Achille et la tortue** : « *Achille voit une tortue devant lui. Il court pour la rattraper mais il ne pourra y arriver car lorsque Achille atteint la place qu'occupait la tortue, cette dernière a avancé; il doit donc atteindre maintenant la place qu'elle occupe alors, et ainsi de suite ...* ». Ce paradoxe peut être résolu avec la définition rigoureuse de limite d'une fonction fixée par Weierstrass (1815-1897) et la construction des nombres réels par Dedekind (1831-1916) qui fonde un continu mathématique correspondant au continu de notre intuition physique.

1 Limite en l'infini d'une fonction

1.1 Limite réelle en l'infini, asymptote horizontale

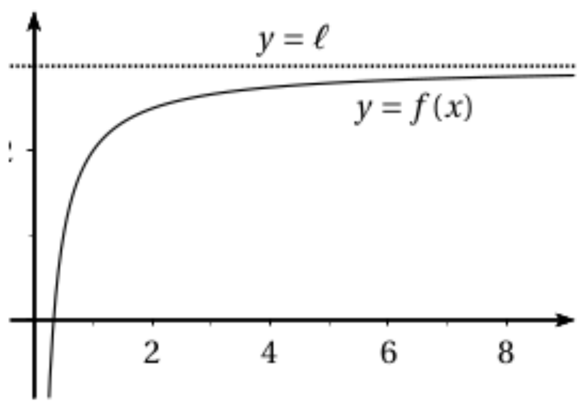
Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;+\infty[$ et soit ℓ un réel.

- **Si tout intervalle ouvert I contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand, alors on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$** et on note :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x)=\ell}$$

- On dit alors que la droite d'équation $y=\ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.



La droite d'équation $y=\ell$ est asymptote à courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty\,;a]$ et soit ℓ un réel.

- **Si tout intervalle ouvert I contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x négatif et assez**

grand en valeur absolue, alors on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{-\infty} f(x) = \ell}$$

- On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

Capacité 1 ***Interpréter graphiquement une limite finie en l'infini***

Soit f une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{-\infty} f(x) = 4$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = -2$.

1. Représenter une courbe possible pour f en traçant ses droites asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$.
2. f est-elle nécessairement une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$?

1.2 Limite infinie en l'infini

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[\alpha\,; +\infty[$.

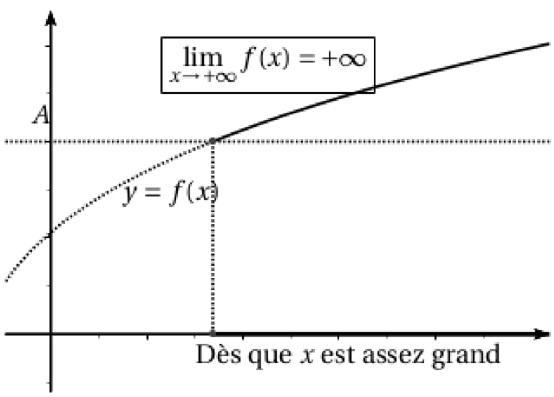
- **Si tout intervalle $]A\,; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand, alors on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$** et on note :

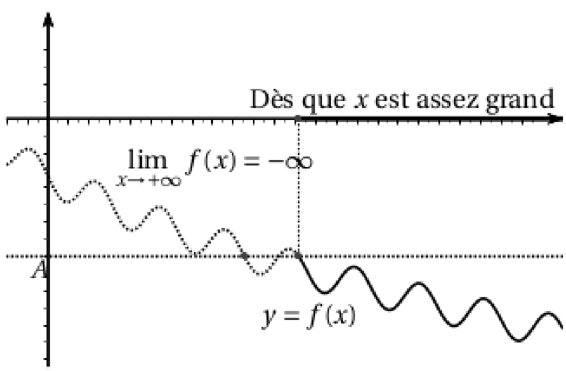
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x) = +\infty}$$

- **Si tout intervalle $]-\infty\,; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand, alors on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$** et on note :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x) = -\infty}$$

On a des définitions similaires pour $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$





Capacité 2 *Comprendre la définition d'une limite en l'infini*

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse :

- **Affirmation 1 :** Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors f croissante sur son intervalle de définition.
- **Affirmation 2 :** Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ alors f décroissante sur son intervalle de définition.
- **Affirmation 3 :** Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors $f(x) < 0$ pour x assez grand.
- **Affirmation 4 :** Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ alors $f(x) > 734$ pour x assez petit.

1.3 Lien avec les suites

Propriété 1 ***admise***

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$.
Si la limite de la fonction f en $+\infty$ existe alors la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant a$ par $u_n = f(n)$, possède la même limite.

1.4 Limites de référence en l'infini

Propriété 2

1.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

3.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

4.

$$\text{Soit } p \in \mathbb{R} \text{ alors,} \quad \lim_{x\to+\infty} p = p \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} p = p$$

5.

$$\text{Si } m > 0 \text{ alors } \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} mx + p = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} mx + p = -\infty \end{cases}$$

6.

$$\text{Si } m < 0 \text{ alors } \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} mx + p = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} mx + p = +\infty \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{cases}$$

8.

$$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+ \\ \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \end{cases}$$

Démonstration

Les démonstrations des limites de la fonction exponentielle en $-\infty$ et en $+\infty$ sont au programme et seront établies dans la propriété 5 de ce chapitre.

2 Limite d'une fonction en un réel a

Dans toute cette section, on considère une fonction f définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ et un réel a tel que soit $a \in \mathscr{D}_f$, soit a est une borne de $\mathscr{D}_f$.

2.1 Limite infinie en a, asymptote verticale

Définition 4

- **Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tous les x assez proches de a, c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]a-\alpha\,;a+\alpha[$ et dans $\mathscr{D}_f$.**

  On note $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty}$.

- **Lorsqu'on considère la restriction de f à $\mathscr{D}_f \cap]a\,;+\infty[$, on dit que f a pour limite $+\infty$ à droite de a (ou en a^+) si tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tous les x d'un certain intervalle $]a\,;a+\alpha[$ et dans $\mathscr{D}_f$.**

  On note $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty}$.

- On définit de même que f a pour limite $+\infty$ à gauche de a (ou en a^-) et on note $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty}$.

- **Si f a pour limite $+\infty$ en a, en a^+ ou en a^-, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.**

On a des définitions similaires pour $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$.

2.2 Limite finie en a et limites de référence

Définition 5

Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en a signifie que tout intervalle ouvert de centre ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tous les x proches de a, c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]a-\alpha\,;a+\alpha[$ et dans $\mathscr{D}_f$.

On note : $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell}$.

En particulier, si $a \in \mathscr{D}_f$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ alors $\ell = f(a)$.

Comme pour les limites infinies, on peut avoir besoin de définir les notions de limite finie à droite en a notée $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \ell}$ ou de limite finie à gauche en a notée $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \ell}$.

Propriété 3 *admise*

1. Soit a un réel :

- Si $a \geqslant 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- Si f est un polynôme ou un quotient de polynômes défini en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a$

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

3.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

4.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Capacité 3 *Interpréter graphiquement des limites*

On considère une fonction f dont on donne ci-dessous le tableau de variation.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormal du plan.

x	$-\infty$		-1			1		$+\infty$
$f(x)$	731	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	732

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Quelles sont les valeurs de $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$ et de $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$?
3. Quelles sont les limites de f en 1^- et 1^+ ?
4. Déterminer les éventuelles droites asymptotes horizontales à $\mathscr{C}_f$.
5. Déterminer les éventuelles droites asymptotes verticales à $\mathscr{C}_f$.
6. Dans un repère orthonormal du plan, tracer les droites asymptotes à $\mathscr{C}_f$ puis une représentation possible de $\mathscr{C}_f$.

3 Règles opératoires sur les limites

Dans toute cette section les fonctions u et v sont deux fonctions admettant une limite finie ou infinie, lorsque x tend vers a qui peut être un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
L'abréviation FI signifie forme indéterminée, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de théorème général permettant de conclure.

3.1 Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	L'	L'	L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)+v(x) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

3.2 Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	ℓ'	$\ell'>0$ ou $\ell'<0$	$\ell'>0$ ou $\ell'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)\times v(x) =$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

3.3 Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$\ell>0$ ou $\ell<0$	$\ell>0$ ou $\ell<0$
$\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	$\ell'\neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	$\ell'>0$ ou $\ell'<0$	$\ell'>0$ ou $\ell'<0$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{u(x)}{v(x)} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$

$\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	$-\infty$	$+\infty$	$\ell>0$	$\ell<0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	0^+ ou 0^-	0^+ ou 0^-	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{u(x)}{v(x)} =$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0^- ou 0^+	0^- ou 0^+	FI	FI

Capacité 4 ***Déterminer une limite par règles opératoires***

Voir les capacités 3 et 4 du manuel Indice page 169.

3.4 Formes indéterminées

Il existe quatre formes indéterminées : « $\infty - \infty$ » ,« $\infty \times 0$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », $\frac{0}{0}$ ».En pratique, pour lever l'indétermination, on change de forme en factorisant par exemple par les termes prépondérants (en l'infini pour tous entiers $n > p$, x^n l'emporte sur x^p, et x^n l'emporte sur $\sqrt{x}$).

Méthode

- Pour lever une forme indéterminée de la forme $+\infty + (-\infty)$, on peut essayer de changer de forme en factorisant l'expression par le terme prépondérant. Pour une fonction polynôme, le terme prépondérant en $+\infty$ ou $-\infty$ est le terme de plus haut degré.
- Pour lever une forme indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$, on peut factoriser le numérateur et le dénominateur par leur terme prépondérant puis simplifier le quotient des termes prépondérants.

Capacité 5 ***Lever une forme indéterminée en factorisant le terme prépondérant***

1. Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2x^5 + 3x^4 - x + 1$.

   Déterminer la limite de h en 0, puis en $-\infty$ et enfin en $- + \infty$

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 + x - 2}$$

   a. Déterminer la limite de f en chacune des bornes de son ensemble de définition.

   b. Interpréter graphiquement ces limites.

Capacité 6 ***Limite et algorithme de seuil***

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est *vraie* ou *fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :** La boucle ci-dessous se termine :

```
def f(x):
    return x ** 3 - x ** 2

x = 0
while f(x) < 734:
    x = x + 1
```

- **Affirmation 2 :** La boucle ci-dessous ne se termine pas.

```
def f(x):
    return x ** 3 - x ** 2
```

```
x = 0
while f(x) > -734:
    x = x - 1
```

- **Affirmation 3 :** La boucle ci-dessous se termine.

```
def f(x):
    return (734 * x ** 2 + 735) / (x ** 2 + 1)

x = 0
while abs(f(x) -734) > 0.001:
    x = x + 1
```

4 Limite d'une fonction composée

Théorème 1 ***admis***

Soit u une fonction définie sur intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que $\forall x \in \mathrm{I}, u(x) \in \mathrm{J}$.

On peut définir sur I la fonction composée $g : x \mapsto (v \circ u)(x)$ par $g(x) = v(u(x))$.

Soit trois réels : a appartenant à I (ou borne de I), b appartenant à J (ou borne de J) et c tels que :

$$\lim_{x \to a} u(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{X \to b} v(X) = c$$

alors on a par composition des limites :

$$\lim_{x \to a} v(u(x)) = c$$

Ce théorème s'applique également aux suites $(v(u_n))_{n \geqslant 0}$ *définies par composition (avec* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = b$*).*
On peut remplacer a, b ou c par $+\infty$ *ou* $-\infty$*.*

Capacité 7 ***Déterminer une limite par composition (voir capacité 6 p.171)***

On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0,5$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus on sait que :

$f(-2) = -3$ et $f(3) = 2$

On donne le tableau de variation d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2\}$, on note $\mathscr{C}_g$ la courbe de g dans un repère du plan.

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ǁ $-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-5

1. Calculer $g(f(-2))$ puis déterminer un encadrement de $g\left(f(3)\right)$.

2. **a.** Que vaut $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x<-2}} g(x)$? Interpréter graphiquement cette limite.

b. Tracer dans un repère une représentation possible de la courbe $\mathscr{C}_g$ avec ses droites asymptote(s)qu'on peut déduire du tableau de variation de g et sa tangente au point d'abscisse 1.

3. En justifiant déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x<-2}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) - f(x)$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) \times f(x)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} g(f(x))$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} g(f(x))$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x<-2}} f(g(x))$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x>-2}} f(g(x))$

5 Limites par comparaison ou encadrement

Propriété 4 ***Passage à la limite dans une inégalité***

Soit a un réel (ou $+\infty$ ou $-\infty$), soit I un intervalle contenant a ou dont a est une borne, soit f une fonction définie sur I telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et soit k un réel.

Si pour tout réel $x \in$ **I on a** $f(x) < k$ **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant k$**.**

Lorsqu'on passe à la limite dans une inégalité, son sens est conservé mais elle devient une inégalité large.

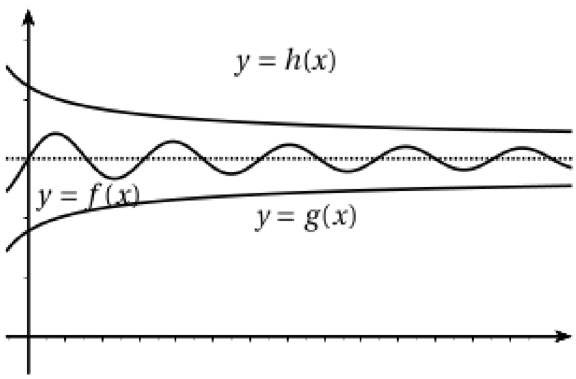
Théorème 2 ***Théorème d'encadrement dit « des gendarmes », admis***

Soient f, g, h trois fonctions définies sur un intervalle I du type $]a\,;+\infty[$ telles que :

- pour tout $x \in$ I, on ait $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \ell$

Alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$

Un théorème similaire permet d'obtenir une limite par encadrement lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers un réel b.

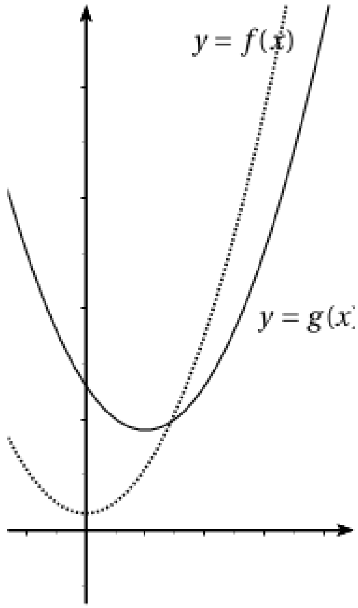


Théorème 3 ***Théorème de comparaison, même preuve que le théorème analogue pour les suites***

Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I du type $]a\,;+\infty[$.

1. Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $g(x) \leqslant f(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
2. Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Un théorème similaire permet d'obtenir une limite infinie par comparaison lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers un réel b.



Capacité 8 ***Utiliser les théorèmes de limite par comparaison ou encadrement***

1. Soit f une fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Déterminer les limites suivantes :

   a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x + f(x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **c.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x + f(x)$

2. Soit la fonction g définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + 1$.
   a. Représenter graphiquement la courbe de g avec sa calculatrice et conjecturer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. En utilisant un encadrement de $\sin(x)$, déterminer un encadrement de $g(x)$ pour tout réel x et en déduire les limites conjecturées.

6 Limites et exponentielle

6.1 Limites de la fonction exponentielle en $-\infty$ et $+\infty$

Propriété 5

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \ldots$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \ldots$.

La droite d'équation ...... est asymptote à la courbe de la fonction exponentielle au voisinage de $-\infty$.

Démonstration ***Au programme***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - (x+1)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x et en déduire le tableau de variations de f.

....

....

....

....

....

....

2. Justifier que pour tout réel x, on a $e^x \geqslant x+1$.

....

....

....

3. En déduire la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$.

....

....

....

....

4. Déterminer la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$ à l'aide du théorème de limite par composition.

....

....

....

....

....

Capacité 9 *Déterminer une limite par règles opératoires (dont composition)*

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,5t+2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(3x+1)e^{-3x}$

6.2 Croissances comparées entre l'exponentielle et les puissances

Propriété 6 ***Croissances comparées de e^x et x^n***

Soit n un entier naturel non nul, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty}$$

En particulier on a : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0}$.

Démonstration ***Au programme, voir manuel p. 172***

- Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$. Étudier les variations de f.

  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....

- En déduire que pour tout réel $x > 0$ on a $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

  ....
  ....
  ....
  ....
  ....

- En déduire la limite de $\dfrac{e^x}{x}$ en $+\infty$.

  ....
  ....
  ....
  ....

- Soit n un entier naturel.
  - Justifier que pour tout réel $x > 0$, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \left(\dfrac{1}{n}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$.

    ....

    ....

    ....

  - En déduire la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}$ en $+\infty$ en appliquant le théorème de limite par composition.

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

- Soit n un entier naturel.
  - Démontrer que pour tout réel $x < 0$, on a : $x^n\mathrm{e}^x = (-1)^n\dfrac{(-x)^n}{\mathrm{e}^{-x}}$.

    ....

    ....

    ....

  - En déduire la limite de $x^n\mathrm{e}^x$ en $-\infty$ en appliquant le théorème de limite par composition.

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

- Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} = \sqrt{2\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}}$.

  ....

  ....

....

En déduire la limite de $\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ en appliquant le théorème de limite par composition.

....

....

....

....

....

Capacité 10 ***Déterminer une limite avec une règle de croissances comparées***

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x - e^x$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 3)e^x$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{4x}}{x}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\cos(x)e^x}{x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}$

Table des matières