Histoire 1

Euclide a vécu au troisième siècle avant J.C. Les treize livres des *Éléments d'Euclide* sont une synthèse des mathématiques connues à son époque auxquelles il apporte compléments, démonstrations et rigueur en arithmétique, algèbre et géométrie. La géométrie dans l'espace est traitée dans les trois derniers livres avec en particulier la construction, dans une sphère, des cinq solides réguliers, pyramide, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre.
Le concept de vecteur est apparu au milieu du XIXe siècle grâce aux travaux de William Rowan Hamilton avec les quaternions et Hermann Grassmann avec l'algèbre linéaire. Hamilton a introduit les vecteurs pour décrire des quantités ayant à la fois une intensité et une direction, tandis que Grassmann développa une théorie plus générale des espaces vectoriels. Leur travail a établi les bases de l'algèbre vectorielle utilisée aujourd'hui en physique et en mathématiques.

1 Vecteurs de l'espace

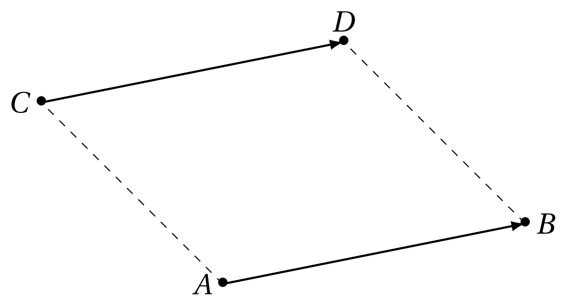
Dans cette partie, on étend à l'espace $\mathscr{E}$ la notion de vecteur vue en géométrie plane.

1.1 Vecteurs et translations

Définition 1

Soit A et B deux points de l'espace.
La *translation de vecteur* $\overrightarrow{AB}$ est la transformation du plan qui à tout point C de l'espace, associe l'unique point D tel que $ABDC$ est un parallélogramme.
On représente le *vecteur de translation* $\overrightarrow{AB}$ par une flèche d'origine A et d'extrémité B.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa *direction*, celle de la droite (AB) et de toutes les droites qui lui sont parallèles;
- son *sens*, celui de A vers B sur la droite (AB);
- sa *longueur*, celle du segment $[AB]$.



Remarque 1

Pour tout point A de l'espace, la translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$ laisse invariant tout point M de l'espace. On dit que c'est la translation de vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$ et pour tout point A de l'espace, on a $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

1.2 Vecteurs égaux

Définition 2

Deux *vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *égaux* si et seulement si $\begin{cases} \text{la translation de vecteur } \overrightarrow{AB} \text{ transforme } C \text{ en } D \\ \text{ou} \\ \text{la translation de vecteur } \overrightarrow{CD} \text{ transforme } A \text{ en } B \end{cases}$.

Il est équivalent d'écrire :
Deux *vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *égaux* si et seulement s'ils ont **même direction, même sens et même norme**.

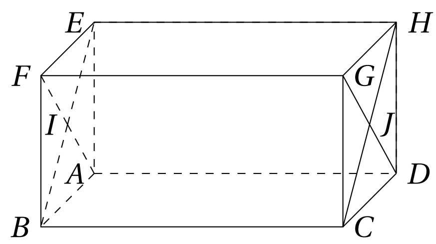
Propriété 1 *Égalité vectorielle et parallélogramme*

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace avec A distinct de B.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *égaux* si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Capacité 1 *Prouver des égalités vectorielles*

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.



1. Déterminer trois vecteurs de la figure égaux au vecteur $\overrightarrow{FE}$.
2. Déterminer l'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{GJ}$.
3. Construire l'image K du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AG}$.

   Que peut-on dire des points H, G et K ? Justifier.

Définition 3

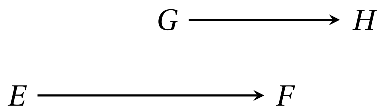
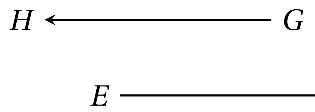
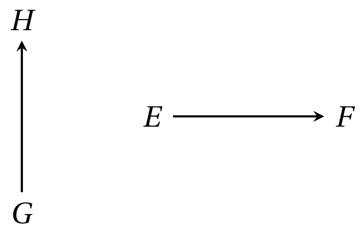
Soit A, B, C et D quatre points de l'espace, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des **représentants** du même vecteur qu'on peut noter avec une seule lettre, par exemple $\overrightarrow{u}$.

1.3 Vecteurs colinéaires

Définition 4

1. Deux vecteurs sont *colinéaires* s'ils ont même direction.
2. Deux vecteurs qui ont même direction, même longueur mais des sens opposés, sont des vecteurs *opposés*. Par exemple les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.

   Le vecteur opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$ est noté $-\overrightarrow{u}$ et on peut donc écrire $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Ci-dessous, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont de même direction, de même sens mais pas de même longueur. Ils sont colinéaires mais pas égaux.  	Ci-dessous, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont de même direction, de sens opposés mais de même longueur. Ils sont opposés (cas particulier de colinéaires) mais pas égaux.  	Ci-dessous, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont de même longueur mais pas de même direction. Ils ne sont ni colinéaires, ni égaux. 

Capacité 2 ***Identifier des vecteurs colinéaires, opposés, égaux***

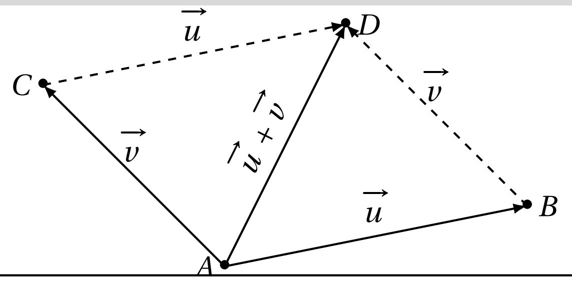
Dans le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ de la capacité 1 :

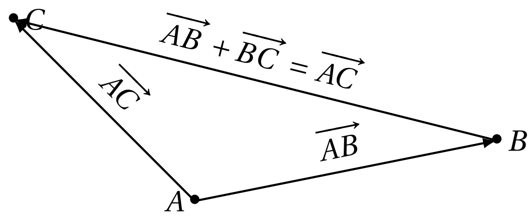
1. Déterminer trois vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{FI}$.
2. Déterminer trois vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{FI}$.
3. Déterminer trois vecteurs colinéaires, de même sens mais pas de même norme que le vecteur $\overrightarrow{FI}$.
4. Déterminer trois vecteurs colinéaires, de sens opposé mais pas de même norme que le vecteur $\overrightarrow{FI}$.

1.4 Sommes de vecteurs

Définition 5

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathscr{E}$ et A, B, C, D quatre points de l'espace $\mathscr{E}$.
Le vecteur somme $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur de la translation obtenue par l'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$.





Propriété 2 ***Construction d'un vecteur somme***

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathscr{E}$, le vecteur somme $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur tel que :

- *Règle de Chasles*

  Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ alors $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

- *Règle du parallélogramme*

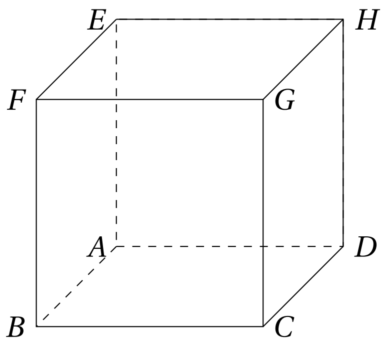
  Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ alors $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ avec $ABDC$ parallélogramme.

Propriété 3 *Propriétés algébriques de la somme vectorielle*

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace $\mathscr{E}$.

- $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$ *commutativité*
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$ *associativité*
- $\overrightarrow{0}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}$ *élément neutre*
- $(-\overrightarrow{u})+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$ *opposé*

Capacité 3 *Construire une somme vectorielle*



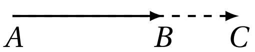
1. Soit $ABCDEFGH$ un cube.
   - **a.** Donner un représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}$.
   - **b.** Construire un représentant d'origine C du vecteur $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}$.
   - **c.** Déterminer un représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}$.
   - **d.** Justifier que $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.
   - **e.** Déterminer l'image du point H par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$.
2. Soit $MNPQ$ un tétraèdre.
   - **a.** Faire une figure.
   - **b.** Recopier et compléter l'égalité : $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MP}+\ldots+\overrightarrow{QP}$
   - **c.** En déduire que $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{QN}$.

1.5 Produit d'un vecteur par un réel

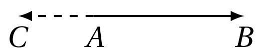
Définition 6

Soit A et B deux point distincts de l'espace et λ un réel, le vecteur $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ est défini par :

$$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$



$$\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$



☞ Premier cas : $\lambda \geqslant 0$

– $C \in [AB)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ de même direction et de même sens ;

- $AC = \lambda AB$

☞ Second cas : $\lambda < 0$

- $C \in (AB)$ et $C \notin [AB]$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ de même direction et de sens opposés ;
- $AC = (-\lambda)AB$

Propriété 4

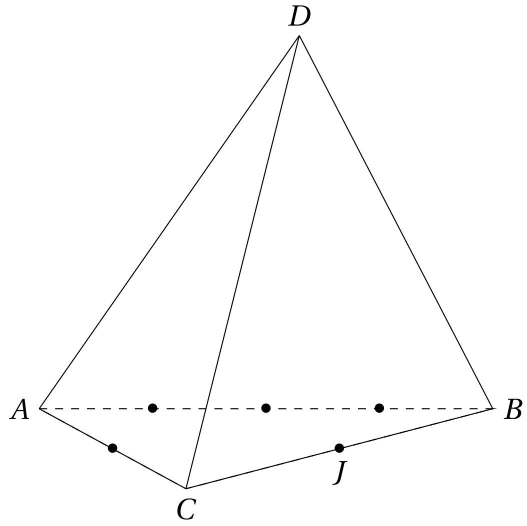
- Soit A et B deux point distincts de l'espace et λ un réel.
  - $\overrightarrow{AB}$ et $\lambda\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
  - $\left\|\lambda\overrightarrow{AB}\right\| = |\lambda|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.
- $0\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.
- Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et λ et μ deux réels :
  - $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$ *distributivité*
  - $\lambda(\mu\overrightarrow{v}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{v}$.
- Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel non nul λ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

Propriété 5 ***Applications de la colinéarité***

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace.

1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si deux points sont confondus ou les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. Si $A \neq B$, les points A, B et C sont alignés si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AB}$).
3. Si $A \neq B$ et $C \neq D$, les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
4. Si $A \neq B$ et $C \neq D$, les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement s'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$.

Capacité 4 *Utiliser la colinéarité pour démontrer un alignement ou un parallélisme*



Soit $ABCD$ un tétraèdre. J est le milieu de $[BC]$, H et F sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

1. Compléter la figure.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que les points F, H et J sont alignés.

1.6 Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition 7

- Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ s'il existe des réels x, y et z tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{w} + z\overrightarrow{t}$.
- Des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **linéairement indépendants** s'il n'est pas possible d'exprimer l'un comme combinaison linéaire des deux autres, sinon ils sont dits **linéairement dépendants**.

Propriété 6

Des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **linéairement indépendants**
si l'égalité $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ implique $x = y = z = 0$.

Capacité 5 ***Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs, voir capacité 2 p.51***

Soit $ABCDEFGH$ le cube de la capacité 3.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ peut-il s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$?

Capacité 6 ***Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs, voir capacité 2 p.51***

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soit N et un point de l'espace et I le milieu du segment $[EF]$. Démontrer que :

$$\overrightarrow{NI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF}\right)$$

2. Soit $ABCD$ un tétraèdre. I est le milieu de $[CD]$, J celui de $[AI]$, M et H sont définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$$

   a. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaisons linéaires de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   b. En déduire que les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

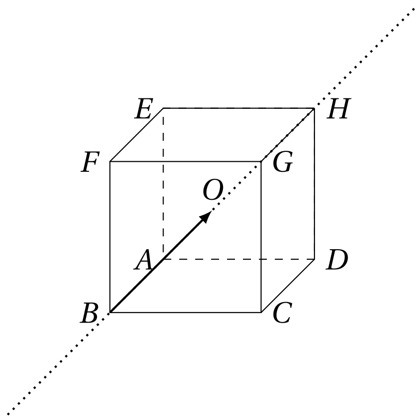
2 Droites de l'espace

2.1 Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur

Définition 8

- Par deux points distincts de l'espace A et B, passe une seule droite $\mathscr{D}$ et on note $\mathscr{D} = (AB)$.
- Un **vecteur directeur** d'une droite $\mathscr{D} = (AB)$ est le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ou tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Par exemple dans le cube $ABCDEFGH$ de centre O, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\frac{1}{5}\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BH}$, $\lambda\overrightarrow{BH}$ avec $\lambda \neq 0$ sont des vecteurs directeurs de la droite (BH).



Propriété 7

Soit A et B deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Méthode

On déduit de la définition et de la propriété précédentes, qu'une droite $\mathscr{D}$ de l'espace peut être caractérisée :

- soit par la donnée de deux points distincts A et B ;
- soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Capacité 7 ***Utiliser la colinéarité pour démontrer un alignement ou un parallélisme***

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[BC]$ et E, F et G les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FE}$. Que peut-on en déduire pour les points F, G et E ?
3. Donner trois vecteurs directeurs de la droite (FE).

2.2 Problèmes d'alignement et de parallélisme

Propriété 8

Soit deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
$\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Logique 1

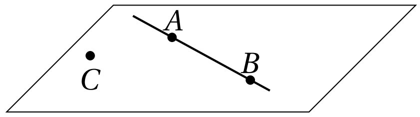
Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites de l'espace. Les implications suivantes sont-elles vraies ?

1. (I_1) « Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont parallèles, alors une droite $\mathscr{D}_3$ dont un vecteur directeur est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est parallèle à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. »
2. (I_2) « Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qui ne sont pas colinéaires alors elles sont sécantes. »
3. (I_3) « Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont des vecteurs directeurs colinéaires alors elles n'ont pas de point commun. »

3 Plans de l'espace

3.1 Caractérisation d'un plan par des points

Définition 9



1. Par trois points non alignés A, B et C de l'espace $\mathscr{E}$, passe un unique plan $\mathscr{P}$.
2. Dans chaque plan de l'espace, toutes les règles de la géométrie plane s'appliquent.
3. Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan $\mathscr{P}$, alors tous les points M de la droite (AB) appartiennent à $\mathscr{P}$. On dit que la droite (AB) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

Capacité 8

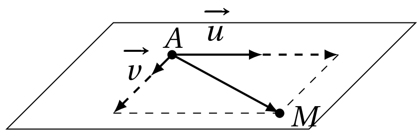
1. Déterminer le nombre maximum de plans (respectivement de droites) distincts qu'on peut définir à partir de quatre points de l'espace.
2. Déterminer le nombre de plans qu'on peut définir en utilisant uniquement les sommets d'un cube $ABCDEFGH$.

3.2 Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires

Définition 10

La **direction** d'un plan $\mathscr{P}$ est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points du plan.

Propriété 9



1. Deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de la direction d'un plan, engendrent cette direction, c'est-à-dire que tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de cette direction peut s'exprimer comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$: il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

   On dit que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est une **base** du plan.

2. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace.

   L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ avec x et y réels, est un plan passant par A et de direction engendrée par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Ce plan est noté $\left(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Démonstration *Voir p.52 du manuel Indice*

3.3 Vecteurs coplanaires

Définition 11

Trois vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si pour un point O quelconque de l'espace et les points A, B et C définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$, les quatre points O, A, B et C appartiennent à un même plan.

Propriété 10 *Caractérisation des vecteurs coplanaires*

1. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas des vecteurs colinéaires, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

2. Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe un 3-uplet de réels (x, y, z) distinct de $(0, 0, 0)$ (trois réels non tous nuls) tel que $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

3. Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas coplanaires si et seulement si l 'égalité $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ implique $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ c'est-à-dire $x = y = z = 0$.

Démonstration

Soit O un point de l'espace et les points A, B et C définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$.

1. $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ *équivaut à* $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$.

   Par hypothèse $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, donc O, A et B ne sont pas alignés et définissent un unique plan.

   D'après la caractérisation d'un plan par un point et un couple de vecteurs non colinéaires, on peut écrire :
   $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ *équivaut à* C appartient au plan (OAB).

   Par définition des vecteurs coplanaires :
   $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ *équivaut à* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ coplanaires.

2. Voir manuel p.62. On démontre les deux implications séparément.

   - $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose d'abord que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.
     On raisonne par disjonction des cas :

     - <u>Premier cas : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires</u>
       D'après la propriété précédente :
       Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ coplanaires *alors* il existe x et y réels tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.
       On peut donc écrire :
       Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ coplanaires *alors* il existe $(x, y, z) = (x, y = -1)$ 3-uplet de réels non tous nuls tels que $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

- Second cas : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ sont colinéaires
  - Premier sous-cas : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{0}$
    Il existe λ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$.
    On peut écrire $0\overrightarrow{w} + \lambda \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
    Donc il existe $(x, y, z) = (0, \lambda, -1)$ 3-uplet de réels non tous nuls tels que $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
  - Deuxième sous-cas : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
    On peut écrire $0\overrightarrow{w} + 1\overrightarrow{u} + 0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
    Donc il existe $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ 3-uplet de réels non tous nuls tels que $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

- $\boxed{\Longleftarrow}$ On démontre ensuite la réciproque : on suppose qu'il existe un 3-uplet $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tel que $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
  On peut supposer que $z \neq 0$, on peut alors écrire $\overrightarrow{w} = -\frac{x}{z}\overrightarrow{u} - \frac{y}{z}\overrightarrow{v}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{OC} = -\frac{x}{z}\overrightarrow{OA} - \frac{y}{z}\overrightarrow{OB}$.
  On raisonne de nouveau par disjonction des cas :
  - Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ sont colinéaires, alors les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}$ ou $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires, donc les points O, A, B et C sont alignés et donc appartiennent à un même plan.
  - Sinon, alors d'après la caractérisation d'un plan par un point et un couple de vecteurs non colinéaires, le point C appartient au plan $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

  Dans les deux cas, on vérifie que O, A, B et C appartiennent à un même plan et donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

3. La propriété 3. est la négation de la propriété 2. : notez que la négation de « *Il existe n, tel que $P(n)$ vraie* » est « *Pour tout n, $P(n)$ faux* ».

Capacité 9 *Démontrer que des vecteurs sont coplanaires*

Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le milieu de $[FC]$. M est le point tel que $\overrightarrow{HM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HB}$.

1. Compléter la figure.

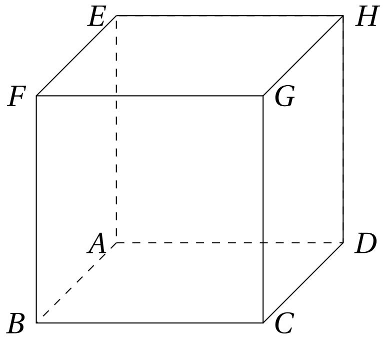
2. Citer trois vecteurs coplanaires avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG}$.

3. Citer trois vecteurs non coplanaires avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG}$.

4. Démontrer que $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AE}\right)$.

En déduire que $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FM}$ sont coplanaires.

5. En décomposant $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ selon $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$, démontrer de même que les points A, M et I sont alignés.



4 Positions relatives de droites et de plans

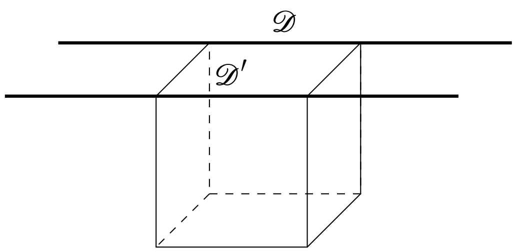
4.1 Positions relatives de deux droites de l'espace

Propriété 11

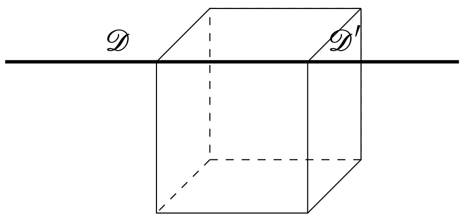
Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont **coplanaires** s'il existe un plan qui les contient toutes les deux.

☞ Premier cas : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires et strictement parallèles.

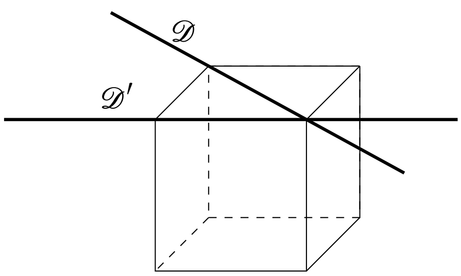


$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires et confondues.

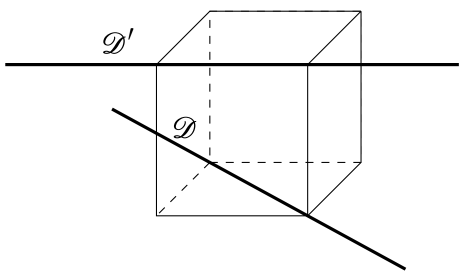


☞ Second cas : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires et sécantes.



$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont non coplanaires.



4.2 Positions relatives de deux plans de l'espace

Définition 12

Deux plans sont parallèles si et seulement s'ils ont la même direction.

Propriété 12

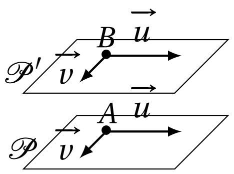
Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de l'espace.

- Premier cas : $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles

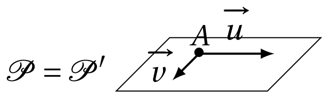
  $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont même direction et sont parallèles par définition si et seulement si deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qui engendrent la direction de $\mathscr{P}$ sont égaux respectivement à des vecteurs de la direction de $\mathscr{P}'$ et donc engendrent celle-ci.

  Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ parallèles sont soit confondus s'ils ont au moins un point commun, soit sans aucun point commun.

  $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles.

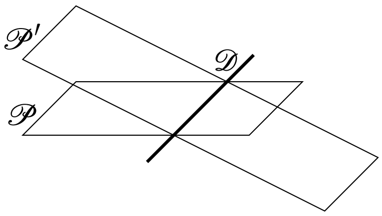
  

  $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus.

- Second cas : $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants

  Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles alors ils sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$ d'intersection.

4.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace

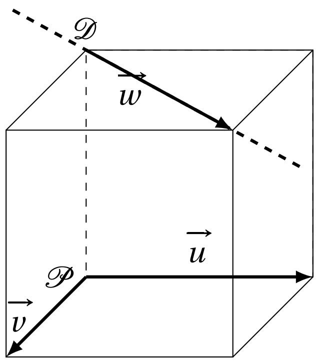
Propriété 13

Dans l'espace, soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ et $\mathscr{P}$ un plan de direction engendrée par un couple $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ de vecteurs non colinéaires.

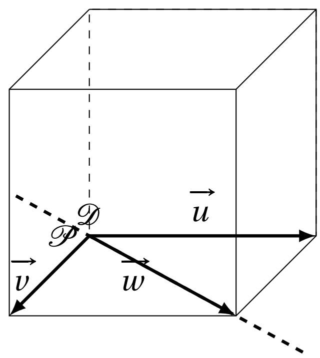
- Premier cas : $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires

  Si la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ ont au moins un point d'intersection alors $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$, sinon $\mathscr{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

$\mathscr{D}$ strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

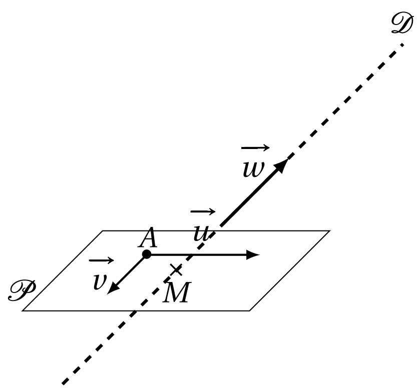


$\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

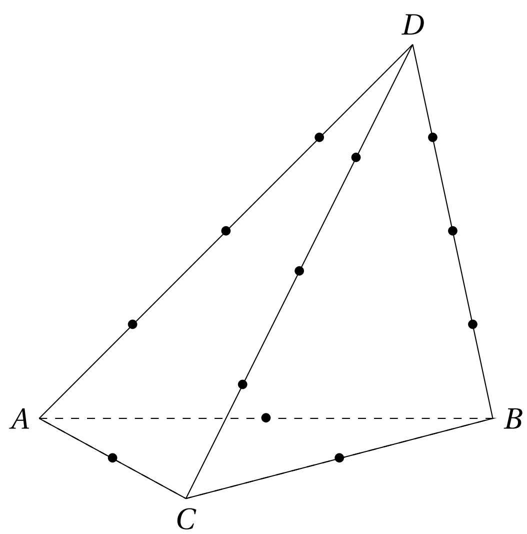


☞ Second cas : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires

La droite $\mathscr{D}$ est alors sécante au plan $\mathscr{P}$, qu'elle coupe en un unique point d'intersection M.



Capacité 10 ***Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.***



On considère un tétraèdre $ABCD$ et les points E, F, G, I, J et K définis par :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DA} \quad \overrightarrow{DF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DB} \quad \overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} \quad \overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} \quad \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = \vec{0} \quad \overrightarrow{KB} = -\overrightarrow{KC}$$

1. Compléter la figure.

2. Les droites (IG) et (JK) sont-elles sécantes ?

3. Démontrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

4. Démontrer que les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles.

5. Démontrer que la droite (IG) est sécante avec le plan (ABC).

6. En déduire que les plans (IGF) et (ABC) sont sécants et construire leur intersection sur la figure.

Table des matières