Histoire 1

René Descartes (1596-1650) est un mathématicien et philosophe français. Son oeuvre majeure, le *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, fut rédigée en Français et non en Latin et publiée avec en appendice un traité, *La Géométrie*, où Descartes utilise les coordonnées pour poser les bases de la géométrie analytique.

1 Bases et repères de l'espace

1.1 Décomposition d'un vecteur dans une base de l'espace

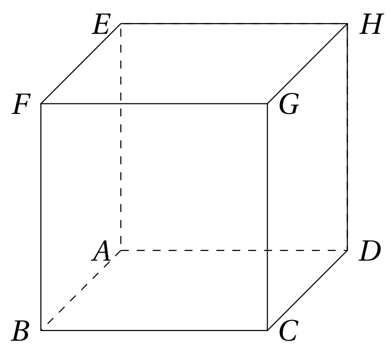
Définition 1

Un triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de vecteurs de l'espace est une **base de l'espace** si et seulement si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.

Capacité 1 ***Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan ou trois vecteurs de l'espace, forment une base, voir capacité 7 p.57***

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

1. Donner une base du plan (ABG).
2. Compléter cette base en une base de l'espace
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EG}$ forment-ils une base de l'espace ?



Propriété 1

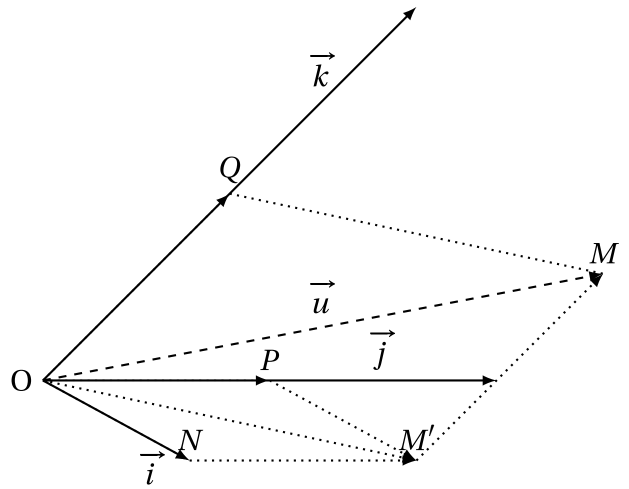
Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base de vecteurs de l'espace, pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$(x; y; z)$ est le triplet de **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Démonstration ***Voir p.56 du manuel***

Exemple 1



Dans la figure ci-dessus, on a $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{M'M} = 1\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$.

On en déduit que $\vec{u}$ a pour coordonnées $(1\,;0,5\,;0,5)$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Capacité 2 *Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base, voir capacité 8 p.57*

Soit $ABCDEFGH$ le cube de la capacité 1.
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EG}$:

1. Dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
2. Dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG}\right)$.

Propriété 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ dans une base de l'espace et λ un réel.

- $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0$
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x',\ y = y',\ z = z'$
- $\vec{u} + \vec{v}\ (x + x'; y + y'; z + z')$
- $\lambda\vec{u}\ (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$

Capacité 3 *Utiliser les règles opératoires sur les coordonnées de vecteurs*

L'espace est muni d'une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1. Les vecteurs $\vec{u}\ (-3\,;1\,;7)$ et $\vec{v}\ (6\,;-2\,;13)$ sont-ils colinéaires ?
2. Déterminer des réels x et y pour que les vecteurs $\vec{u}\ (1\,;x\,;5)$ et $\vec{v}\ (2\,;-3\,;y)$ soient colinéaires.
3. Soit les vecteurs $\vec{r}\ (1\,;-2\,;0)$, $\vec{s}\ (3\,;1\,;3)$ et $\vec{t}\ (-1\,;-5\,;-3)$.

   a. Déterminer les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{r} - \overrightarrow{s} - \overrightarrow{t}$.
   b. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{s}$ et $\overrightarrow{t}$?

4. Dans chaque cas déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ sont coplanaires :

   a. $\overrightarrow{a}\,(1\,;2\,;1)$, $\overrightarrow{b}\,(-1\,;1\,;2)$ et $\overrightarrow{c}\,(0\,;3\,;3)$

   b. $\overrightarrow{a}\,(-2\,;1\,;3)$, $\overrightarrow{b}\,(1\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{c}\,(1\,;1\,;-3)$

1.2 Coordonnées d'un point dans un repère de l'espace

Définition 2

Soit $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non nuls et O un point de l'espace.
$\left(\text{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est un repère de l'espace si et seulement si $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base de l'espace.

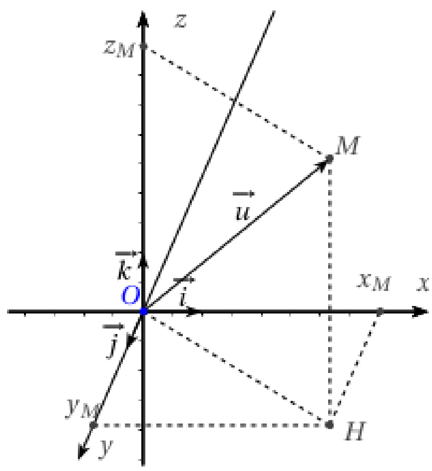
Propriété 3

Soit $\left(\text{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$ et M un point de l'espace.

- Il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

- $(x; y; z)$ est le triplet de coordonnées de M dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ où x, y et z sont respectivement **l'abscisse**, **l'ordonnée** et **la cote** du point M.



Démonstration

Soit $\left(\text{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$ et M un point de l'espace.
D'après la propriété 1, les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ sont l'unique triplet $(x; y; z)$ qui permet d'exprimer $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$: $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ sont donc les coordonnées du point M dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Propriété 4

Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace.
Soit $A\left(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A\right)$,$B\left(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B\right)$ deux points de l'espace $\mathscr{E}$ et I le milieu de $[AB]$.

1. $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A\,;\,z_B - z_A\right)$
2. $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A + y_B}{2}\,;\,\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

Capacité 4 *Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme). Voir la capacité 12 p.60.*

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soit les points $A(-1\,;\,3\,;\,4)$, $B(7\,;\,6\,;\,1)$ et $C(0\,;\,2\,;\,-5)$.
   - **a.** Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.
   - **b.** Déterminer les coordonnées du point F symétrique de D par rapport à A.
2. On considère les points $A(1\,;\,-2\,;\,1)$, $B(3\,;\,-1\,;\,2)$, $C(a\,;\,b\,;\,0)$, $E(0\,;\,4\,;\,3)$ et $F(-4\,;\,x\,;\,1)$.
   - **a.** Déterminer (a, b) pour que les points A, B et C soient alignés.
   - **b.** Déterminer x pour que (AB) et (EF) soient parallèles.

Capacité 5 *Déterminer si des vecteurs forment une base de l'espace en résolvant un système. Voir la capacité 13 p. 61*

L'espace est muni d'une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et on considère les vecteurs $\vec{u}\,(5\,;\,4\,;\,1)$ et $\vec{v}\,(-1\,;\,1\,;\,1)$.

1. Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Un vecteur $\vec{w}$ est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement s'il existe des réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

   Déterminer dans chaque cas si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

   a. $\vec{w}\,(2\,;\,-2\,;\,-2)$ **b.** $\vec{w}\,(6\,;\,3\,;\,0)$ **c.** $\vec{w}\,(18\,;\,3\,;\,-4)$ **d.** $\vec{w}\,(1\,;\,1\,;\,-3)$

2 Représentations paramétriques d'une droite

2.1 Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

Propriété 5

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Un point $M\left(x;y;z\right)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\alpha;\beta;\gamma\right)$ si et seulement s'il existe un réel t tel que :

$$M \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

t est le paramètre de M

$$M \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Un tel système est une **représentation paramétrique** de $\mathscr{D}$.

Démonstration ***Voir manuel Indice p.58***

Soit la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\alpha;\beta;\gamma\right)$.
D'après la caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur :

M appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Or $\overrightarrow{AM} = \left(x - x_A; y - y_A; z - z_A\right)$, donc on a :

M appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x - x_A = \alpha t \\ y - y_A = \beta t \\ z - z_A = \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Capacité 6 ***Lire ou déterminer une représentation paramétrique de droite***

Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la droite Δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 4 \\ z = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer un vecteur directeur de Δ et un point de Δ.
2. Le point $M(-3;4;-3)$ appartient-il à la droite Δ ?
3. Déterminer les coordonnées de trois points de Δ.

4. Déterminer une autre représentation paramétrique de la droite Δ.

2.2 Utiliser une représentation paramétrique pour résoudre un problème, résolution de systèmes d'équations linéaires

Capacité 7 ***Étudier l'intersection de deux droites de l'espace***

Soit $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 4-3t \\ y = 2t-1 \\ 4z = 8+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1. Déterminer les coordonnées d'un point de $\mathscr{D}$ et un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
2. Le point $A(19\,;-11\,;7)$ appartient-il à $\mathscr{D}$?
3. Soient $B(3\,;2\,;-1)$ et $C(-9\,;7\,;0)$.

   Démontrer que la droite (BC) n'est pas parallèle à $\mathscr{D}$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de (BC).
5. Étudier l'intersection des droites (BC) et $\mathscr{D}$ en résolvant un système d'équations.

   Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes à partir de leurs représentations paramétriques, voir la Capacité 11 page 60 du manuel Indice.

Capacité 8 ***Démontrer que des droites ne sont pas coplanaires***

Exercice 125 p. 71 du manuel Indice.

Table des matières