Histoire 1

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) est un mathématicien et physicien français dont les travaux portèrent sur tous les domaines mathématiques. Il nous a laissé en particulier la notation $f'(x)$ pour la fonction dérivée, la notation indicielle u_n pour les suites et le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction. En arithmétique des entiers, il résolut la difficile équation de Pell $x^2 - ay^2 = \pm 1$ en introduisant les fractions continues. Après avoir succédé à Euler à l'Académie des sciences de Berlin, il siégea dans la commission du système métrique sous la Révolution, il est inhumé au Panthéon.

1 Rappels sur la dérivation

1.1 Nombre dérivé et tangente

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel appartenant à I et h un réel différent de 0 tel que $a+h$ appartient à I.

f est dérivable en a si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, tend vers un nombre lorsque h tend vers 0.

Ce nombre est le **nombre dérivé** ou **dérivée** de f en a, il est noté $f'(a)$.

C'est la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0 et on note : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)}$.

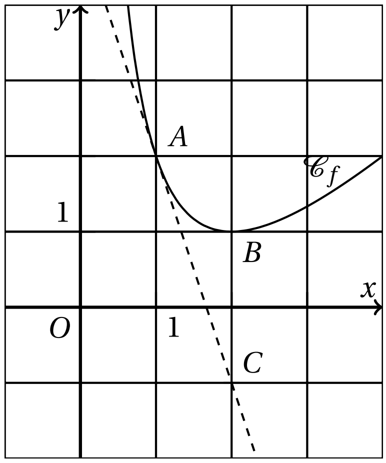
Si $y = f(x)$ on peut utiliser la notation de Leibniz $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pour la dérivée $f'(x)$ de f en x.

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit a un réel appartenant à I et h un réel non nul tel que $a+h$ appartient à I.
On considère les points $A\big(a\,;\,f(a)\big)$ et $M_h\big(a+h\,;\,f(a+h)\big)$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan.
Si f **est dérivable en** a, lorsque h tend vers 0, les sécantes (AM_h) à $\mathscr{C}_f$ tendent vers une position limite qui est la droite passant par le point $\mathrm{A}\big(a\,;\,f(a)\big)$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Cette droite, « **limite des sécantes** », est appelée **tangente à $\mathscr{C}_f$ en A$\big(a\,;\,f(a)\big)$**.

Capacité 1 *Déterminer graphiquement un nombre dérivé et une équation de tangente*

On considère une fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ et dérivable en 1 et en 2. On a représenté ci-contre la courbe de f et ses tangentes aux points A et B d'abscisses respectives 1 et 2.



1. Le nombre dérivé de f en 2 a pour valeur :

   a. 2 **b.** 1 **c.** 0 **d.** $\frac{1}{2}$

2. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est :

   a. $y = -\frac{1}{3}x + 2$ **b.** $y = 3x + \frac{5}{3}$ **c.** $y = 5 - 3x$ **d.** $y = -3x + \frac{5}{3}$

1.2 Fonction dérivable sur un intervalle

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable en a, une équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en tout point a de I, on dit que f est dérivable sur I, et on appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction f' définie par :

$$\boxed{f' : a \mapsto f'(a)}$$

Capacité 2 ***Utiliser la définition du nombre dérivé***

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.
   On rappelle que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a $f'(x) = f(x)$.
   On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.
   a. À l'aide d'un nombre dérivé calculé en un point bien choisi, démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.
   b. La droite d'équation $y = \mathrm{e}x$ est-elle tangente à $\mathscr{C}_f$?
2. Est-il vrai que si une fonction g est définie sur un intervalle I alors g est dérivable sur I ?

1.3 Dérivées des fonctions usuelles

f est une fonction dérivable sur $\mathscr{D}$ par rapport à la variable x

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble $\mathscr{D}$ de dérivabilité de f
$f(x) = p$ avec $p \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$ avec $(m, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$

TABLE 1 – Dérivées des fonctions usuelles (à compléter en cours d'année)

1.4 Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables par rapport à la variable x sur un intervalle I

Opération sur u et v, $f =$	Fonction dérivée $f' =$	Ensemble de dérivabilité de f
$u + v$	$u' + v'$	I
λu avec $\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$	I
uv	$u'v + uv'$	I
$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$	I privé des réels x tels que $v(x) = 0$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	I privé des réels x tels que $v(x) = 0$

TABLE 2 – Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

Capacité 3 ***Dériver une somme, un produit, un inverse ou un quotient de fonctions dérivables***

Soit les fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \frac{x^6}{3} - 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}$$

Déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

1. $f \times g$ **2.** g^2 **3.** $\dfrac{-2}{g}$ **4.** $\dfrac{f}{g}$

2 Dérivée d'une fonction composée

2.1 Notion de fonction composée

Méthode

Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$.

☞ Décomposons le calcul de l'image de -7 par la fonction g :

$$\overbrace{-7 \xmapsto{u} 2-(-7) = 9 \xmapsto{v} \sqrt{9} = 3}^{g}$$

L'image de -7 s'obtient par enchaînement de deux fonctions :

- On calcule d'abord $u(-7) = 2-(-7) = 9$ image de -7 par la fonction $u : x \mapsto 2-x$.
- Ensuite on calcule $v(9) = 2-(-7)$ image de $u(-7)$ par la fonction $v : y \mapsto \sqrt{y}$.

☞ Et si on veut déterminer l'image de l'image de 3 par la fonction g ?

- $3 \xmapsto{u} 2-3 = -1$
- ⚠ On ne peut pas déterminer l'image de -1, qui est négatif, par $v : y \mapsto \sqrt{y}$

L'image de 3 par la fonction g n'est pas définie car l'image de 3 par la première fonction de l'enchaînement n'appartient pas à l'intervalle de définition de la deuxième fonction v de l'enchaînement.

☞ $g(x)$, s'il est défini, s'obtient par l'enchaînement de deux fonctions :

- on part de x auquel on associe $2-x$ par la fonction $u : x \mapsto 2-x$.
- ensuite à $u(x) = 2-x$ on associe $\sqrt{u(x)} = \sqrt{2-x}$ par la fonction $v : y \mapsto \sqrt{y}$ où $2-x$ est substitué à la variable y.

On dit que g est la **composée** de la fonction u suivie de la fonction v, et on a $\boxed{g(x) = v(u(x))}$.

On note $\boxed{g = v \circ u}$ où $\circ$ est l'opérateur de **composition**.

$$x \overset{u}{\longmapsto} 2-x \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{2-x} \qquad \left(x \overset{g}{\longmapsto} \sqrt{2-x}\right)$$

Définition 4

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a $u(x) \in \mathrm{J}$.
La fonction composée u suivie de v, notée $v \circ u$, est la fonction définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$.

2.2 Dérivée de la composée avec une fonction affine

Propriété 2 ***Dérivée de la composée avec une fonction affine***

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{x} \arrow[r, "\boldsymbol{u}"] \arrow[rr, bend left, "\boldsymbol{g = v \circ u}"] & \boldsymbol{mx+p} \arrow[r, "\boldsymbol{v}"] & \boldsymbol{v(mx+p)} \end{tikzcd}$$

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I et J un intervalle tel que, pour tout réel x de J, $mx+p$ appartient à J, avec m et p des constantes réelles, alors la fonction composée g définie sur I par $g(x) = v(mx+p)$ est dérivable sur J.
De plus, pour tout réel x appartenant à J, on a $\boxed{\boldsymbol{g'(x) = m \times v'(mx+p)}}$.

Capacité 4 ***Déterminer la fonction dérivée d'une composée avec une fonction affine***

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (634x - 632)^{733}$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $g'(x)$ pour tout réel x.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1.

2.3 Dérivée d'une composée de fonctions dérivables

Propriété 3 ***Cas général de la dérivée de fonctions composées***

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie en $u(x)$ pour tout x appartenant à I.

- On rappelle que la fonction composée de u suivie de v notée $v \circ u$ est définie pour tout réel $x \in \mathrm{I}$ par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.
- Si u est dérivable sur I et si v est dérivable en $u(x)$ pour tout x appartenant à I, alors la fonction

composée $v \circ u$ est dérivable sur I et on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{I},\ (v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))}$$

Corollaire

1. Soit n un entier non nul.

   - **Premier cas $n > 0$:**
     Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction u^n est dérivable sur I et on a $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$.
   - **Second cas $n \leqslant -1$:**
     Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si u ne s'annule pas sur I, alors la fonction composée u^n est dérivable sur I et on a $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$.

2. Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction composée $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et on a $\boxed{(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$.

3. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée e^u est dérivable sur I et on a $\boxed{(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u}$.

Démonstration *Voir page 174 du manuel Indice*

1. On démontre le premier cas : $n > 0$ et u dérivable sur I.

   - On décompose la fonction composée u^n.

$$\begin{tikzcd} x \in \mathrm{I} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "g = v \circ u"] & u(x) \arrow[r] & u^n(x) \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{X} \xrightarrow{v} \cdots$$

   - On applique la propriété de dérivation d'une fonction composée.

     ....

     ....

     ....

2. Soit u fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, considérons la fonction composée $\sqrt{u}$. *Voir page 176 du manuel Indice pour une autre preuve.*

   - On décompose la fonction composée $\sqrt{u}$.

$$\begin{tikzcd} x \in \mathrm{I} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "g = v \circ u"] & u(x) \arrow[r] & \sqrt{u(x)} \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{X} \xrightarrow{v} \cdots$$

- On applique la propriété de dérivation d'une fonction composée.

  ....

  ....

  ....

3. Soit u fonction dérivable sur un intervalle I, considérons la fonction composée e^u.

- On décompose la fonction composée e^u.

$$\begin{tikzcd} x \in \mathrm{I} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "g = v \circ u"] & u(x) \arrow[r] & \mathrm{e}^{u(x)} \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{X} \xrightarrow{v} \cdots$$

- On applique la propriété de dérivation d'une fonction composée.

  ....

  ....

  ....

Capacité 5 *Appliquer la formule de dérivation d'une fonction composée*

1. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $h(x) = \left(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}\right)^4$.

2. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{1}{\left(x^4 + \mathrm{e}^{-2x}\right)^3}$.

3. On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$.
Retrouver l'expression de $f'(x)$, déterminée ci-dessous avec un logiciel de calcul formel.

```
In [42]: fx = sqrt(x ** 2 + 1) * exp(sqrt(x ** 2 + 1))

In [43]: fx
```

Out[43]: $\sqrt{x^2+1}e^{\sqrt{x^2+1}}$

```
In [44]: factoriser(dérivée(fx, x))
```

Out[44]: $\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$

3 Dérivation et sens de variation

3.1 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

Théorème 1 ***admis***

Soit f une fonction monotone et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Compléter par $\leqslant$, $=$ *ou* $\geqslant$.

- Si f est croissante sur I alors pour tout $x \in$ I on a $f'(x)\cdots 0$.
- Si f est décroissante sur I alors pour tout $x \in$ I on a $f'(x)\cdots 0$.

Théorème 2 ***admis, réciproque du précédent***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

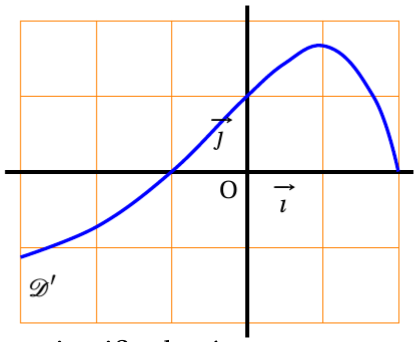
Compléter par $\leqslant$, $=$ *ou* $\geqslant$.

- Si pour tout réel x de I on a $f'(x)\cdots\cdots 0$ alors f est croissante sur I.
- Si pour tout réel x de I on a $f'(x)\cdots\cdots 0$ alors f est décroissante sur I.

Capacité 6 ***Exploiter le lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction***

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur $[-3\,;\,2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{D}'$ ci -contre.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.

3.2 Dérivée et recherche d'extremum

Définition 5

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f admet un **maximum local** en a s'il existe un intervalle J inclus dans I et contenant a, tel que pour tout $x \in \mathrm{J}$, $f(x) \leqslant f(a)$.

  f admet un **maximum global** en a si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leqslant f(a)$.

- f admet un **minimum local** en a s'il existe un intervalle J inclus dans I et contenant a, tel que pour tout $x \in \mathrm{J}$, $f(x) \geqslant f(a)$.

  f admet un **minimum global** en a si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \geqslant f(a)$.

Propriété 4 ***Condition nécessaire, condition suffisante pour avoir un extremum local***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit a un réel appartenant à I.

☞ **Condition nécessaire d'extremum local** Si f atteint un extremum local en un réel a qui n'est pas une borne de I, alors $f'(a) = 0$.

☞ **Condition suffisante d'extremum local** Si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f atteint un extremum local en a.

3.3 Dérivée seconde

Définition 6

☞ Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée f' est aussi dérivable sur I. On appelle **dérivée seconde de** f et on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f'.

☞ Par récurrence, pour un entier $n \geqslant 2$, on peut définir la fonction dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction f dérivable sur I, comme la fonction dérivée de la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ de f si cette dernière est définie et dérivable sur I.

Capacité 7 ***Utiliser la dérivée seconde et les dérivées d'ordre supérieur***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer f' et f''.
2. Étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(-1)$.
3. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.