Histoire 1

Philosophe, auteur des célèbres *Pensées*, mathématicien pionnier du calcul des probabilités, physicien, entrepreneur, Blaise Pascal (1623 - 1662) invente à 19 ans une machine à calculer baptisée *Pascaline*. En 1665, paraît à titre posthume, le *Traité du triangle arithmétique*, où Pascal expose le développement du binôme $(a+b)^n$ et un algorithme de calcul de ses coefficients qui donne son nom à l'ouvrage. Dans le cadre de l'arithmétique, il y développe le principe du raisonnement par récurrence.

1 Ensemble fini

1.1 Ensemble fini

Définition 1

- Un **ensemble fini** est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments.

  Par exemple si E a trois éléments x_1, x_2 et x_3, alors on note $\mathrm{E} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Dans un ensemble il n'y a pas de notion d'ordre et il ne peut y avoir de doublons.
- Le **cardinal** d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de E, on le note $\text{card}(\mathrm{E})$.
- Un ensemble qui ne contient aucun élément, est un **ensemble vide**, noté $\emptyset$.
- Si un élément x appartient à un ensemble fini E on note $x \in \mathrm{E}$.
- Soit A et E deux ensembles finis. Si pour tout $x \in \mathrm{A}$, on a $x \in \mathrm{E}$, alors A est une **partie** de E ou un **sous-ensemble** de E. On dit que A est **inclus** dans E et on note $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et on a $\text{card}(\mathrm{A}) \leqslant \text{card}(\mathrm{E})$.
- Soit A une partie d'un ensemble fini E, le **complémentaire** de A est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On note $\overline{\mathrm{A}} = \{x \in \mathrm{E}\,;\, x \notin A\}$.
- Soit A et B deux parties d'un même ensemble fini E, **l'intersection** de A et B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **et** à B. On note $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E}\,;\, x \in \mathrm{A} \text{ et } x \in \mathrm{B}\}$.
- Soit A et B deux parties d'un même ensemble fini E, **la réunion** de A et B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **ou** à B. On note $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E}\,;\, x \in \mathrm{A} \text{ ou } x \in \mathrm{B}\}$.
- Deux parties A et B d'un ensemble fini E sont **disjointes** si leur intersection $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est vide, on note $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$

Capacité 1 ***Maîtriser les opérations ensemblistes***

On considère deux ensembles : $\mathrm{A} = \{1, 3, 8, 4\}$ et $\mathrm{B} = \{4, 6, 5, 1, 3\}$.

1. Déterminer un ensemble C tel que $\mathrm{A} \subset \mathrm{C}$.
2. Déterminer une partie de A, distincte de A et non vide.
3. Donner un élément de B qui n'appartient pas à A.

4. Déterminer l'intersection de A et B et donner son cardinal.

5. Déterminer la réunion de A et B et donner son cardinal.

6. Déterminer le complémentaire de A dans $A \cup B$.

Capacité 2 ***Effectuer un dénombrement simple à l'aide d'un arbre ou d'un tableau***

1. Combien de mots de 3 lettres, qui aient un sens ou non, peut-on former en mélangeant les 3 lettres du mot « BAC » ?

2. On lance deux fois de suite un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. Déterminer la probabilité que la somme des deux résultats obtenus soit un multiple de 3.

1.2 Principe additif

Propriété 1 ***Principe additif***

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E, dont les nombres d'éléments respectifs sont m et n.

- Si A et B sont **disjointes**, alors le nombre d'éléments de leur réunion $A \cup B$ est égal à $m + n$.

  Ce **principe additif** de dénombrement, peut s'écrire formellement :

$$\boxed{\text{Si } A \cap B = \varnothing \text{ alors } \operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)}$$

- Dans le cas général, on a la formule du crible :

$$\boxed{\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)}$$

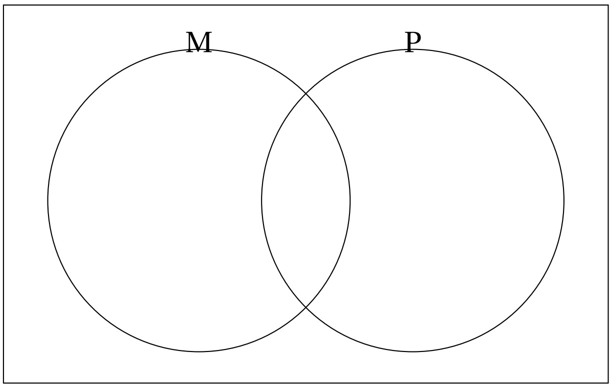
Corollaire

Soit A une partie d'un ensemble fini E et $\overline{A}$ son complémentaire.
Le nombre d'éléments de $\overline{A}$ est égal à : $\boxed{\operatorname{card}(\overline{A}) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A)}$.

Capacité 3 ***Utiliser le principe additif pour dénombrer***

Dans une classe de 35 élèves, 25 élèves suivent la spécialité Mathématiques, 20 élèves suivent la spécialité Physique et 8 élèves ne suivent ni la spécialité Mathématiques ni la spécialité Physique.

1. Compléter le diagramme de Venn ci-dessous où M représente les Mathématiques et P représente la Physique.



2. Calculer le nombre d'élèves qui suivent la spécialité Mathématiques ou la spécialité Physique.

3. Calculer le nombre d'élèves qui suivent la spécialité Mathématiques et la spécialité Physique.

1.3 Principe multiplicatif et k-uplets d'un ensemble fini

Définition 2

- Le **produit cartésien** de deux ensembles finis E et F, noté $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$, est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{F}$.
- Soit E un ensemble fini et k un entier strictement positif.
  - L'ensemble $\underbrace{\mathrm{E} \times \mathrm{E} \cdots \times \mathrm{E}}_{k \text{ fois}}$ est l'ensemble des k**-uplets** d'éléments de E.
  - Un k**-uplet** d'éléments de E est une liste ordonnée de k éléments de E qui peuvent être identiques.
  - On note parfois E^k l'ensemble $\underbrace{\mathrm{E} \times \mathrm{E} \cdots \times \mathrm{E}}_{k \text{ fois}}$.

Propriété 2 ***Principe multiplicatif***

- Si E et F sont deux ensembles finis avec respectivement n et m éléments alors leur produit cartésien $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ a $n \times m$ éléments.

  On a : $\boxed{\operatorname{card}(\mathrm{E} \times \mathrm{F}) = \operatorname{card}(\mathrm{E}) \times \operatorname{card}(\mathrm{F})}$.

- Soit E un ensemble fini avec n éléments, et k un entier strictement positif, l'ensemble E^k des k-uplets de E est constitué de n^k éléments.

  On a : $\boxed{\operatorname{card}(\mathrm{E}^k) = (\operatorname{card}(\mathrm{E}))^k}$.

Capacité 4 ***Utiliser le principe multiplicatif pour dénombrer***

1. Déterminer la liste des triplets de l'ensemble $E = \{x, y\}$. On pourra s'aider d'un arbre.

2. Combien de séquences génétiques de 50 nucléotides peut-on former à l'aide des quatre nucléotides de base A, C, G et T ?

3. Un octet est codée sur 8 bits et un bit peut prendre deux valeurs 0 ou 1. Combien de valeurs différentes peut-on coder sur un octet ?

4. Un pixel est constitué de trois composantes (Rouge, Vert, Bleu) et chacune est codée sur un octet. Combien de couleurs différentes peut-on coder ainsi ?

2 k-uplets d'éléments deux à deux distincts, permutations

2.1 Nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts d'un ensemble fini E

Définition 3

Soit E un ensemble fini avec $\text{card}(E) = n$ et k un entier strictement positif.
Un **k-uplet d'éléments deux à deux distincts de E** est un k-uplet de E dont tous les éléments sont différents.

Il n'y a pas de répétition dans un k-uplet d'éléments deux à deux distincts.

Propriété 3

Soit E un ensemble fini avec n éléments et k un entier strictement positif.
Le nombre de **k-uplet d'éléments deux à deux distincts de E** est égal à $n \times (n-1) \times \cdots (n-(k-1))$.

Capacité 5 ***Dénombrer des k-uplets d'éléments deux à deux distincts***

1. Sur sa guitare, Martha joue avec sept notes : *Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si* . Combien d'accords différents peut-elle obtenir avec quatre notes distinctes de cet ensemble? et avec quatre notes qui peuvent être confondues ?

2. Huit athlètes s'affrontent sur un 100 mètres. Déterminer le nombre de podiums possibles (or, argent, bronze).

3. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle retourne le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts d'un ensemble à n éléments :

```
def kuplets_distincts(n, k):
    c = 1
    ...............
    ...............
    return c
```

2.2 Permutation des éléments d'un ensemble fini E

Définition 4

Soit E un ensemble fini et n le nombre d'éléments de E.
Une **permutation** de E est un n-uplet d'éléments deux à deux distincts de E.

Théorème 1 ***Factorielle de*** n

Soit E un ensemble fini et n le nombre d'éléments de E.

- Le nombre de permutations de E est la **factorielle** de n qu'on note $n!$.
- On a :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ \text{pour tout entier naturel non nul } n, \text{ on a } n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 \end{cases}$$

Algorithmique 1 ***Factorielle de*** n

1. Déterminer le nombre de classements possibles dans une course de 8 chevaux.
2. À l'aide du tableau page 16 du manuel Indice, calculer 12! avec la calculatrice. Donner une interprétation de ce nombre.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $n! = n \times (n-1)!$.
4. Démontrer que le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts d'un ensemble à n éléments est égal à $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.
5. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que `fact(n)` soit égal à n! pour tout entier naturel n non nul.

```python
def fact(n):
    f = 1
    for k in range(...., ......):
        f = .....
    return f
```

2.3 Manipulation de listes en Python

Méthode ***Listes en Python***

☞ Une séquence ordonnée d'éléments peut être stockée sous la forme d'une liste.

- Le nombre d'éléments dans une liste est sa longueur donnée par `len(L)`.
- Les éléments stockés dans une liste `L` sont indexés de 0 à `len(L)-1`.
- L'élément d'index `i` peut être lu avec `L[i]` ou modifié avec une affectation `L[i] = valeur`.

Un accès en dehors de la plage $[\![0; \texttt{len(L)-1}]\!]$ provoque une erreur.

```
>>> L1 = [10,6,8]
>>> L1[0]
10
>>> L1[1]
6
>>> len(L1)
3
>>> L1[3]
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
IndexError: list index out of range
>>> L1[2] = 9
>>> L1
[10, 6, 9]
```

☞ Une liste Python est un tableau dynamique, on peut ajouter un élément avec `L.append(element)` ou en extraire avec `L.pop(index)`.

```
>>> L1.append(12)
>>> L1
[10, 6, 9, 12]
>>> L1.pop(0) #on extrait l'élément d'indice 0
10
>>> L1
[6, 9, 12]
>>> L1.pop(len(L1)-1) #on extrait le dernier élément
12
>>> L1 = L1 + [14]   #une autre façon d'ajouter un élément
>>> L1
[6, 9, 14]
>>> L.pop() #sans indice on extrait le dernier élément
>>> L1
[6, 9]
```

☞ On peut faire une copie superficielle d'une liste en peuplant une liste vide ou avec un slicing.

```
>>> L2 = []   #liste vide
>>> for k in range(len(L1)): #on remplit L2 avec les éléments de L1
...     L2.append(L1[k])
...
>>> L2
[6, 9]
>>> L3 = L1[:]    #L3 copie superficielle de L1 par slicing
>>> L3
[6, 9]
```

☞ On peut parcourir une liste par index ou par élément avec le protocole d'itérations :

```
>>> for k in range(len(L1)):
...     print(L1[k])
...
6
9
>>> for e in L1:
...     print(e)
...
6
9
```

☞ On peut créer une liste d'entiers consécutifs à partir du constructeur `list` et du générateur `range`. On peut aussi générer des listes par compréhension : liste d'entiers aléatoires avec `randint` ou filtrage des éléments d'une autre liste.

```
>>> L4 = list(range(0, 4))  #liste d'entiers successifs dans [0;4[
>>> L4
[0, 1, 2, 3]
>>> from random import randint
>>> L5 = [randint(1, 6) for k in range(5)] #liste d'entiers alé
    atoires entre 1 et 6
>>> L5
[2, 3, 2, 6, 5]
>>> L6 = [e for e in L5 if e <= 3] #liste des éléments de L5 <= 3
>>> L6
[2, 3, 2]
>>> L7 = [e ** 2 for e in L4] #liste des carrés des éléments de L4
>>> L7
[0, 1, 4, 9]
```

Algorithmique 2 *Tirage aléatoire d'une permutation*

On peut modéliser le tirage aléatoire d'une permutation de l'ensemble des entiers entre 1 et n, par le n-uplet obtenu lors de n tirages successifs sans remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

Compléter la fonction Python ci-dessous, pour que `generer_perm(n)` soit un tirage aléatoire de l'ensemble des entiers entre 1 et n.

```
def generer_perm(n):
    perm = []
    urne = list(range(1, n + 1))
    for k in range(n):
        index_aleatoire = randint(0, ......)
        choix = urne.pop(index_aleatoire)
        perm.append(.........)
    return perm
```

3 Nombre de parties d'un ensemble et combinaisons

3.1 Théorème fondamental

Théorème 2 ***Nombre de parties d'un ensemble I***

Soit E un ensemble fini avec n éléments. On a $\text{card}(\mathrm{E}) = n$.

- L'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E est noté $\mathscr{P}(E)$.
- L'ensemble des parties de E, $\mathscr{P}(\mathrm{E})$, a 2^n éléments.

  On a donc $\boxed{\text{card}(\mathscr{P}(\mathrm{E})) = 2^n}$

Capacité 6 ***Dénombrement par codage binaire et fonction indicatrice***

Soit E un ensemble fini contenant n éléments : $\mathrm{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
On définit une fonction indicatrice $\mathscr{I}$ de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$, qui à chaque partie P de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ associe l'unique n-uplets de $\{0, 1\}$ tel que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\begin{cases} i_k = 1 \text{ si } e_k \in \mathrm{P} \\ i_k = 0 \text{ si } e_k \notin \mathrm{P} \end{cases}$$

1. Déterminer le nombre de parties de l'ensemble à 0 élément, l'ensemble vide noté $\emptyset$.
2. On considère un ensemble E à trois éléments $\mathrm{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.
   - **a.** Énumérer toutes les parties de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ puis déterminer pour chaque partie son image par la fonction indicatrice $\mathscr{I}$ de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ décrite ci-dessus.
   - **b.** Justifier que deux partie distinctes de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ ont des images distinctes par la fonction indicatrice $\mathscr{I}$ de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$. On dit que la fonction indicatrice de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ est *injective*.
   - **c.** Justifier que tout 3-uplet de $\{0, 1\}$ est l'image d'une partie de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ par la fonction indicatrice $\mathscr{I}$ de E. On dit que la fonction indicatrice de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ est *surjective*.
   - **d.** La fonction indicatrice de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ étant *injective* et *surjective*, on dit qu'elle est *bijective*, cela signifie qu'on peut définir sa fonction réciproque : pour tout 3-uplet de $\{0, 1\}$, il existe une unique partie de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ dont elle est l'image. Que peut-on en déduire pour le nombre d'éléments de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$?
3. Généraliser la question précédente au cas d'un ensemble E à n éléments avec n entier non nul.

Capacité 7 ***Appliquer un raisonnement par récurrence pour dénombrer***

1. Quel est le nombre de parties de l'ensemble vide qui contient 0 élément ?
2. Soit un entier naturel n, on suppose que le nombre de parties de tout ensemble fini à n éléments est égal à 2^n et on considère un ensemble E à $n+1$ éléments. On note x un élément de E et $\mathrm{E}' = \mathrm{E} \setminus \{x\}$ l'ensemble à n éléments obtenu si on enlève x de E.
   - **a.** Déterminer le nombre de parties de E' qui est aussi le nombre de parties de E qui ne contiennent pas x.

b. Comment peut-on en déduire le nombre de parties de E qui contiennent x ?

c. Conclure sur le nombre de parties de E.

3. Rédiger une preuve par récurrence du théorème 2.

Capacité 8 ***Modéliser une situation de dénombrement***

Le site marchand *octet* propose 8 produits à la vente. Un client peut mettre dans son panier au plus un article de chaque produit.
Déterminer le nombre de paniers différents qu'un client peut composer.

Algorithmique 3 ***Génération des parties à 2 ou 3 éléments d'un ensemble fini.***

Faire le TP 2 page 40 du manuel Indice.

3.2 Combinaison de k éléments parmi n

Définition 5

Soit E un ensemble fini avec n éléments (n entier naturel) et k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

- Une **combinaison** de k éléments parmi les n éléments de E est une **partie** (ou sous-ensemble) de E constitué de k éléments.
- Le nombre de combinaisons de k éléments parmi les n éléments de E est noté $\binom{n}{k}$, on lit « *k parmi n* ».

Dans une combinaison de k éléments, comme dans un k-uplet d'éléments deux à deux distincts, on n'a pas de répétition mais contrairement à un k-uplet d'éléments distincts, l'ordre n'intervient pas.

Capacité 9 ***Dénombrer à l'aide de combinaisons, utilisation de la calculatrice***

1. Sans calculatrice, en utilisant juste la définition, déterminer $\binom{7}{0}$, $\binom{7}{1}$ et $\binom{7}{7}$. Conjecturer les valeurs de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n}$ pour n entier naturel.

2. Consulter dans le tableau page 18 du manuel Indice, la séquence de touches pour obtenir $\binom{n}{k}$ avec sa calculatrice. Calculer $\binom{35}{3}$ avec la calculatrice. Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte d'une classe de 35 élèves.

3. Un championnat est constitué de 38 matchs. Lors d'un match, deux issues sont possibles : la victoire ou la défaite.

a. Déterminer le nombre de façons de gagner 30 matchs sur 38.

b. Déterminer le nombre de façons de perdre 8 matchs sur 38.

c. Déterminer la probabilité de gagner exactement la moitié des matchs disputés.

3.3 Nombre de combinaisons

Propriété 4

Soit un entier naturel n et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

- On a :
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}$$
- En particulier, on a : $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration

Soit E un ensemble fini avec n éléments et k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

- Donner le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E.

  Il y a $n(n-1)\cdots(n-(k-1))$ k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E.

- Combien de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E correspondent à une partie de k éléments de E?

  Si on se donne k éléments de E, il existe $k!$ façons de les ordonnées, qui est le nombre de permutations d'un ensemble à k éléments. À une partie de k éléments de E, correspondent donc $k!$ k-uplets d'éléments distincts deux à deux de E.

- Déduire des questions précédentes que $n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = k!\binom{n}{k}$.

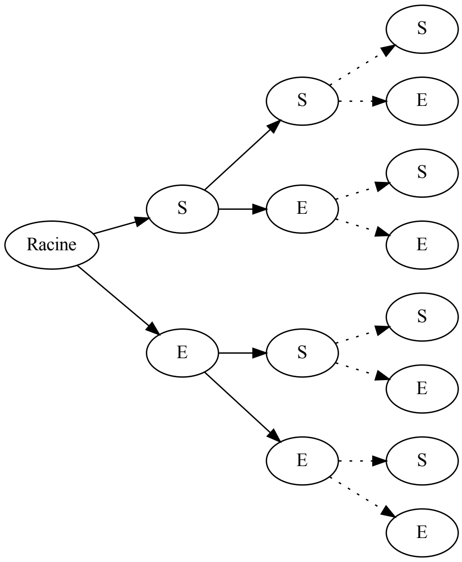
  On obtient une partition de l'ensemble des k-uplets d'éléments de E deux à deux distincts en regroupant les k-uplets qui comportent les mêmes éléments. Le nombre de groupes est égal au nombre de parties de E à k éléments c'est-à-dire $\binom{n}{k}$ et d'après la question précédente, chaque groupe contient $k!$ k-uplets. Par principe additif, puisqu'il s'agit d'une réunion disjointe on peut affirmer que :
$$n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = k!\binom{n}{k}$$

  On en déduit que : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}$.

  Il s'agit d'un exemple d'application du lemme des bergers.

Remarque 1

Une expérience aléatoire de *Bernoulli* ne comporte que deux issues : succès noté S et échec noté E.
On peut modéliser la répétition de n (avec n entier naturel non nul) épreuves de *Bernoulli* identiques et indépendantes par un arbre :



Le nombre de chemins dans l'arbre (de la racine jusqu'à une feuille) comportant exactement k succès et $n-k$ échecs est égal au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, donc il est donné par $\binom{n}{k}$.

Capacité 10 ***Dénombrer à l'aide de combinaisons***

Une urne contient quatre boules rouges numérotées de 1 à 4 et, trois boules bleues numérotées de 1 à 3 et deux boules blanches numérotées de 1 à 2. On tire simultanément trois boules de cette urne.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages contenant trois boules de la même couleur.
3. Déterminer le nombre de tirages contenant au moins une boule rouge.
4. Déterminer le nombre de tirages contenant exactement un seul numéro pair.

4 Propriétés des combinaisons et triangle de Pascal

4.1 Symétrie des nombres de combinaisons

Propriété 5

Pour tout entier naturel n et tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

Démonstration

Soit E un ensemble fini avec n éléments.

Pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E avec k éléments.

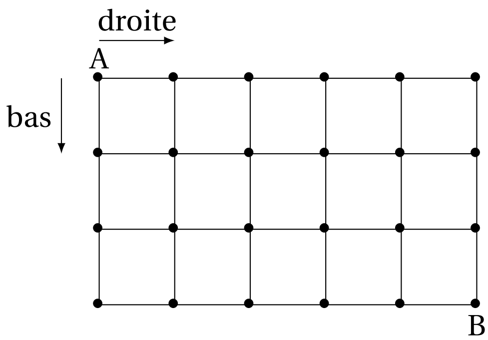
En associant à chaque partie sa partie complémentaire, on définit une bijection entre les parties à k éléments de E et les parties à $n-k$ éléments de E.

On en déduit que le nombre de parties à $n-k$ éléments de E est égal au nombre de parties à k éléments de E et donc que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Capacité 11 *Calculs de combinaisons*

1. Un domino est une petite plaquette portant 2 numéros de 0 à 6 représentés par des points, sauf le zéro (blanc). Un domino peut comporter 2 numéros identiques, on dit qu'il est double. Déterminer le nombre de pièces distinctes dans un jeu de dominos.

2. Une fourmi se trouve au point A. Elle peut se déplacer d'un noeud à l'autre du quadrillage en allant uniquement vers la droite ou vers le bas. Déterminer le nombre de chemins qui lui permettront d'aller du point A au point B.



3. Dans une classe de 30 élèves de terminale, 20 élèves suivent la spécialité mathématiques, 18 suivent la spécialité Physique et 5 ne suivent aucune de ces spécialités.

Pour l'activité *acrogym* du cours d'EPS, le professeur constitue des groupes de 4 élèves.

a. Déterminer le nombre de groupes possibles constitués de 4 élèves suivant la spécialité Mathématiques

b. Déterminer le nombre de groupes possibles constitués de 4 élèves suivant la même spécialité : Physique ou Mathématiques.

c. Déterminer le nombre groupes possibles constitués exactement de 2 élèves en spécialité Mathématiques et 2 élèves en spécialité Physique.

4.2 Lien avec le nombre de parties d'un ensemble

Théorème 3 ***Nombre de parties d'un ensemble II***

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n}}$$

Démonstration ***Au programme, voir démonstration page 18***

Soit E un ensemble fini avec n éléments.

- Rappeler le nombre de parties de E déterminé dans le théorème 2. On peut le noter $\text{card}\left(\mathscr{P}(E)\right)$.

  On a démontré dans le théorème 2 par bijection avec $\{0,1\}^n$ que le nombre de parties de E est égal à 2^n.

- Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, quel est le nombre de parties à k éléments de E ?

  Par définition, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre de parties à k éléments de E est égal à $\binom{n}{k}$.

- Quel principe permet de conclure que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n}$?

  La réunion des parties à k éléments de E avec k parcourant tous les entiers entre 0 et n est exactement l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E. Comme il s'agit d'une réunion disjointe, c'est une partition de $\mathscr{P}(E)$. Par principe additif, la somme des cardinaux des des parties à k éléments de E avec k parcourant tous les entiers entre 0 et n est égale au cardinal de $\mathscr{P}(E)$.

  On a donc l'égalité $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n}}$.

4.3 Relation de Pascal

Théorème 4 ***Relation de Pascal***

Pour tout entier naturel n non nul et tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$\boxed{\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}}$$

Démonstration *Au programme, voir démonstration pages 20 et 24*

Soit n un entier naturel non nul et k un entier entre 0 et $n-1$.

- **Première démonstration par le calcul**

  On utilise la formule démontrée en propriété 4.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}+\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}$$

  On réduit au même dénominateur $(k+1)!=k!(k+1)$:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{(k+1)n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{(k+1)!}+\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}$$

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{(k+1)n(n-1)\cdots(n-(k-1))+n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}$$

  On factorise le numérateur :

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))(k+1+n-k)}{(k+1)!}$$

  On simplifie :

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{(k+1)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

  On utilise l'égalité $n-k=n+1-(k+1)$:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}$$

  On peut conclure avec la formule de la propriété 4 :

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

- **Deuxième démonstration par dénombrement**

  Soit n un entier naturel non nul et k un entier entre 0 et $n-1$.

  Soit E=$\{e_1,e_2,\dots,e_{n+1}\}$ un ensemble avec $n+1$ éléments.

  L'ensemble des parties de E avec $k+1$ éléments est la réunion disjointe de deux ensembles :

  - L'ensemble A des parties de $k+1$ éléments de E qui ne contiennent pas l'élément e_{n+1}. Les $k+1$ éléments sont alors choisis dans l'ensemble $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ à n éléments donc il existe $\binom{n}{k+1}$ parties dans A.

- L'ensemble B des parties de $k+1$ éléments de E qui contiennent l'élément e_{n+1}. L'élément e_{n+1} étant fixé, chacune de ces parties est déterminée par le choix des k autres éléments dans l'ensemble $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ à n éléments. Il existe donc $\binom{n}{k}$ parties dans B.

Par principe additif, le nombre de parties de E avec $k+1$ éléments est donc égal à $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

On en déduit la relation de Pascal : $\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$.

4.4 Triangle de Pascal

Méthode *Calculs des combinaisons $\binom{n}{k}$ avec le triangle de Pascal*

Construction du triangle :

- La propriété $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ permet de placer tous les 1.
- La relation « de Pascal » permet de compléter les autres cases, par exemple $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 6 + 4 = 10$.
- La propriété $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ permet de vérifier la symétrie des coefficients obtenus.

n/k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Triangle « de Pascal » : $\binom{n}{k}$ est à l'intersection de la ligne n et de la colonne k

Capacité 12 *Coefficients binomiaux*

Soit a et b deux réels.

1. Développer et réduire $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ puis $(a+b)^4$.

   Comparer les coefficients obtenus avec ceux du triangle de Pascal.

2. Démontrer par récurrence, à l'aide de la relation de Pascal, que pour tout entier naturel n non nul,

on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

À cause de cette relation, dite du *binôme de Newton*, on qualifie les $\binom{n}{k}$ de coefficients binomiaux.

Algorithmique 4

On considère la fonction Python ci-dessous :

```
1 def blaise(n):
2     L = [1, 1]
3     for i in range(2, n + 1):
4         M = L + [1]
5         for k in range(i - 1):
6             M[k+1] = L[k+1] + L[k]
7         L = M
8     return L
```

1. Recopier et compléter le tableau d'évolution des variables `i`, `k`, `L` et `M` lors de l'exécution de `blaise(3)`.

ligne	4	6	7	4	6	6	7
i	2	2	2	3	3	3	3
k	×	0	×	×	0	1	×
L	[1,1]	[1,1]	[1,2,1]	[1,2,1]	...	...	...
M	[1,1,1]	[1,2,1]	[1,2,1]	[1,2,1, 1]	...	...	...

2. Que représente la liste retournée par `blaise(n)` avec `n` entier naturel ?

3. Déterminer la liste retournée par `blaise(7)`.