Exercice 1 *Métropole juin 2024*

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1m^3 = 1 000 L.

Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en mg. L^{-1}, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg.L^{-1}.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 mg.L^{-1}.

Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0,70$ mg. L^{-1}.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 mg. L^{-1}.

2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en mg. L^{-1}, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.

On admet que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = 0,92 v_n + 0,3.$$

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse,

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-contre écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s) :
    n=0
    v=0.7
    while ___________ :
        n= _____
        v= _____
    return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en mg. L^{-1}, dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' = -0,08y + \frac{q}{50}$$

où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{-0,08x} + \dfrac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

2. **a.** Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.

b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à 0,7 mg.L^{-1}.
On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de 2 mg.L^{-1}.
Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

Exercice 2 *Polynésie Septembre 2023*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\,;\,2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\,;\,2\right]$.

3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leqslant f(x)$.

Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x : $f(x) - x = \frac{3}{4}(x-2)^2$.

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

4. Étude du cas : $\frac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Prouver que la limite de la suite est égale à 2.

5. Étude du cas particulier : $u_0 = 3$.

On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
Recopier et compléter la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
  u = 3
  n = 0
  while ...
      u = ...
      n = ...
  return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$.

À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{x+2}$.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

1. Calculer u_1 et l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

2. On définit la suite (v_n) telle que pour tout entier naturel n on a : $v_n = 1 - \dfrac{1}{u_n}$.

a. Calculer v_0 et v_1 et les écrire sous la forme de fractions irréductibles.

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

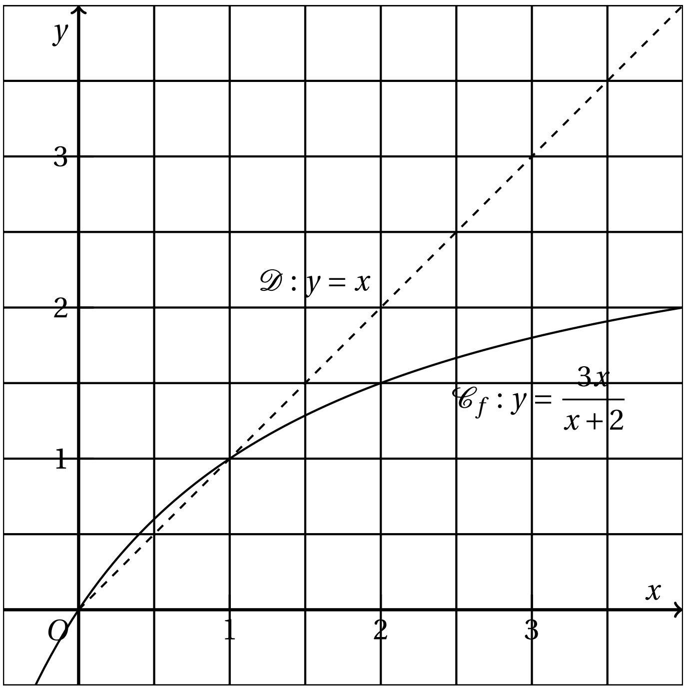
d. Justifier que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Partie B

On considère la suite (w_n) définie par $\begin{cases} w_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = f(w_n) \end{cases}$.

1. On donne ci-dessous, la courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.

Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes w_1, w_2 et w_3. On laissera apparents les traits de construction. Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (w_n) quand n tend vers l'infini ?



2. **a.** Démontrer que pour tout réel $x > 1$, on a $\dfrac{2}{x+2} < \dfrac{2}{3}$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $w_{n+1} - 1 = \dfrac{2}{w_n + 2} \times (w_n - 1)$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant w_n - 1 \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

3. La suite (w_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 4 *Amérique du Sud Septembre 2023 J1*

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Soit n un entier naturel.

Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n.

```
def suite_u(n) :
    u = ...
    for i in range(1,n+1) :
    |    u= ...
    return u
```

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \geqslant 2n$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant, $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?

4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5. On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.

a. En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
def suite_v(n):
    L =[]
    for i in range(n+1) :
    |    L.append(suite_u(i)-2*i+1)
    return L
```

La commande « L.append » permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste L.

Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

Conjecturer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n.

Démontrer cette conjecture.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, la forme explicite de u_n en fonction de n.