Exercice 1 *Polynésie mars 2023*

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leqslant -1$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

4. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 *Métropole mars 2023 J2*

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$.

Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

2. On considère la suite v définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 3 *Métropole septembre 2023 J2*

On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & \frac{1}{\mathrm{e}} \\ u_{n+1} & = & \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)u_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 1. \end{array}\right.$

1. Calculer les valeurs exactes de u_2 et u_3. On détaillera les calculs.

2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel n donné, affiche le terme u_n. Compléter les lignes L_2 et L_4 de ce programme.

L_1	`def suite(n):`
L_2	`  ... ... ... ... ... ...`
L_3	`  for i in range(1, n):`
L_4	`    u=... ... ... ... ... ...`
L_5	`return u`

3. On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1 + \frac{1}{n} \leqslant \mathrm{e}$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

4. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a : $u_n = \frac{n}{\mathrm{e}^n}$.

b. Conjecturer avec la calculatrice la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 *Centres Etrangers mars 2023 G1*

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

On estime que :

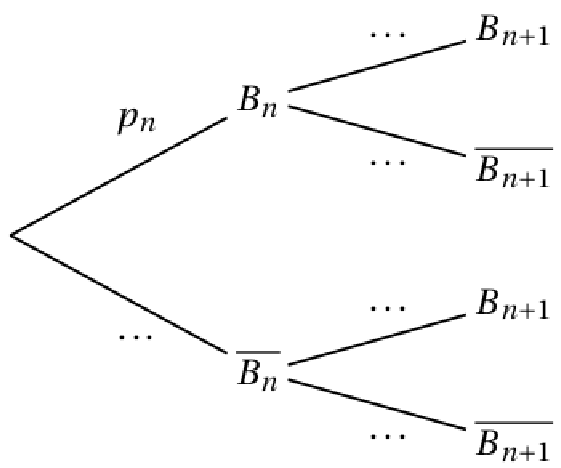
- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel.
On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.

On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0,8$.

b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?

5. **a.** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.

c. Conjecturer la limite de la suite $\left(p_n\right)$.

Exercice 5 *Réunion mars 2023 J2*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, une formule explicite de v_n puis de u_n en fonction de n.

d. Conjecturer la limite de la suite u avec le tableau de valeurs de la calculatrice.

5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil (A) :
    n = 0
    u = 8
    while u > A :
        u = (6*u + 2) / (u + 5)
        n = n + 1
    return n
```

Exercice 6 *Nouvelle-Calédonie mars 2023 J2*

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
        u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n-1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

3. Soit la fonction f définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x-4}{x+3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leqslant u_n.$$

5. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n+2}.$$

a. Donner v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{1}{n+0,5} - 2.$$

d. Conjecturer la limite de la suite (u_n).