Limites de fonctions

Certains exercices sont inspirés du cahier de calcul de Terminale, coordonné par Colas Bardavid :

https://colasbd.github.io/cdc-lycee/

Exercice 1 *Limite par règles opératoires* ★

On considère la fonction f définie sur $]-2\,;+\infty[$ dont on donne le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$	4	$\searrow$	0^+ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

En détaillant les étapes du raisonnement, déterminer les limites suivantes ou préciser s'il s'agit d'une forme indéterminée (FI).

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)\times g(x)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)-f(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$
4. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{g(x)}$
5. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)\times g(x)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x)$
7. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{g(x)}{f(x)}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$
9. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{f(x)}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x-f(x)$
11. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)\times g(x)$
12. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)}{g(x)}$
13. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{f(x)}+g(x)$
14. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{g(x)}{f(x)}$
15. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x f(x)$
16. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$

Exercice 2 *Asymptotes* ★★

Soit a et b deux réels fixés.
Dans un repère du plan, on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation :

$$y=\frac{(a+b)x^2}{x^2+1}+\frac{1}{x-b+a}+b$$

On admet que la droite d'équation $y=1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et que la droite d'équation $x=7$ est aussi asymptote à $\mathscr{C}$.
En détaillant la démarche, déterminer les valeurs des coefficients a et b.

Exercice 3 *Identifier une FI* ★

Pour chacune des limites suivantes, déterminer s'il s'agit d'une Forme Indéterminée, auquel cas on ne cherchera pas à lever l'indétermination, ou sinon calculer la limite.

1. limite de e^x-x en $+\infty$;
2. limite de e^x-x en $-\infty$;
3. limite de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ en 0 ;
4. limite de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^{100}}$ en $+\infty$;
5. limite de $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1 ;
6. limite de $\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x}$ en 0^+
7. limite de $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ en $\dfrac{\pi}{2}^+$

8. limite de $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ en $\dfrac{\pi}{2}^-$

Exercice 4 *Limites par composition* ☆

Soient u et v deux fonctions dont on donne les tableaux de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$u(x)$	7	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	4

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$v(x)$	4	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3

En justifiant, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} v(u(x))$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} v(u(x))$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} u(v(x))$
4. $\lim\limits_{x\to7} u(v(x))$

Exercice 5 *Lever une FI en factorisant par le terme prépondérant* ☆ ☆

Déterminer les limites suivantes. On mettra en facteur les termes dominants pour lever l'indétermination.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-x+1$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2-1}{x^2+1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2-x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x+1}$

Exercice 6 *Lever une FI en simplifiant des facteurs communs* ☆ ☆

Déterminer les limites suivantes. On cherchera des facteurs communs au numérateur et au dénominateur pour lever l'indétermination.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{x-3}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{x-1}}$
2. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$
4. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{9x^2-1}{3x-1}$

Exercice 7 *Lever une FI sur des racines avec une expression conjuguée* ☆ ☆ ☆

Méthode

L'expression conjuguée de $A+B$ est $A-B$ et réciproquement.
Dans une expression avec radicaux, on peut utiliser l'expression conjuguée et l'identité remarquable $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ pour faire passer les radicaux du numérateur au dénominateur ou vice-versa.

1. On veut déterminer la limite de $\sqrt{x^2+1}-x$ en $+\infty$. Par la suite x désigne un réel quelconque.
   a. Quelle est l'expression de conjuguée de $\sqrt{x^2+1}-x$?
   b. Montrer que $\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$.
   c. Simplifier l'expression précédente et en déduire la limite de $\sqrt{x^2+1}-x$ en $+\infty$.
2. Avec la même méthode déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

Exercice 8 *Lever une FI avec une règle de croissance comparée* ☆☆

1. Déterminer les limites suivantes. On factorisera par les termes prépondérants et on pourra utiliser une règle de croissance comparée pour lever l'indétermination.

   a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^{x}$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-x^4}{x^2+1}$ **d.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^x+x}$

2. En utilisant un changement de variable ($X=\dfrac{1}{x}$ ou $X=\sqrt{x}\ldots$) se ramener à l'application d'une règle de croissances comparées.

   a. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\mathrm{e}^{1/x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ **c.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\mathrm{e}^{x^3}$

Exercice 9 *Limite par comparaison* ☆☆

Déterminer les limites suivantes en appliquant un théorème de limite par comparaison ou par encadrement.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\sin(x)}}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x+\sin(x)}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x+\sin(x)}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x)-\sqrt{x}$

Exercice 10 *Limite par comparaison et expression conjuguée* ☆☆

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+\sin(x)+1}$.
On rappelle que pour tout réel $x\geqslant 0$, on a $-1\leqslant \sin(x)\leqslant 1$.

1. **a.** Démontrer que pour tout réel $x\geqslant 0$, on a :

   $$\sqrt{x^2+\sin(x)+1}\geqslant\sqrt{x^2}$$

   b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** Démontrer que pour tout réel $x\geqslant 0$, on a :

   $$f(x)-x=\frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x^2+\sin(x)+1}+x}$$

   b. À l'aide du théorème de limite par encadrement, démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$.

   c. Dans un repère du plan, pour tout entier naturel n on considère les points $M_n(n\,;f(n))$ et $P_n(n\,;n)$.
   Compléter la fonction Python `ecart`, fournie ci-dessous, qui prend en paramètre un réel strictement positif `epsilon` et renvoie le plus petit entier naturel n tel que l'écart d'ordonnée entre les points M_n et P_n soit strictement inférieur à `epsilon`.

```python
#sqrt est la fonction racine carrée, sin est la fonction sinus
from math import sqrt, sin

def f(x):
    return sqrt(x ** 2 + sin(x) + 1)

def ecart(epsilon):
    n = 0
    while ...................... :
        n = ................
    return n
```

Exercice 11 *Lever une FI avec un taux d'accroissement* ☆☆☆

Méthode

Une fonction f définie sur un intervalle I est dérivable en $a \in I$ si et seulement si :

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)}$$

Si on peut calculer $f'(a)$ par une autre méthode, on peut ainsi obtenir la limite en a du *taux d'accroissement* $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Par exemple la fonction exponentielle, égale à sa propre dérivée, est dérivable en 0 et la dérivée en 0 vaut $e^0 = 1$. On en déduit la limite en 0 du taux d'accroissement $\frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1$$

En faisant apparaître un taux d'accroissement, déterminer les limites suivantes.

On admettra que :

- *la fonction* sin *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que sa fonction dérivée est la fonction* cos
- *la fonction* cos *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que sa fonction dérivée est la fonction* $-\sin$

1. $\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$
2. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$