Exercice 1 *Limite par règles opératoires*

Pour chaque suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par une des expressions suivantes, calculer sa limite par règles opératoires.

1. $\dfrac{1}{3n+1}$
2. $\dfrac{e^n}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$
3. $\dfrac{e^{-n}}{n^2+n}$
4. $(2-e^n)\sqrt{n}$
5. $(2-e^{-n})(e^2-\dfrac{1}{n})$
6. $(1-e^n)^2$

Exercice 2 *Limite par comparaison ou encadrement*

Pour chacune des suites définies sur $\mathbb{N}$ par les expressions suivantes, dire si *oui* ou *non*, elle admet une limite. Déterminer la limite, si elle existe.

1. $(-1)^n$
2. $n+(-1)^n$
3. $\cos((-1)^n\pi)$.
4. $\sin((-1)^n\pi)$.
5. $(-1)^{2n}\sqrt{n}$

Exercice 3 *Limite par comparaison ou encadrement*

Pour chaque suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par l'une des expressions suivantes, sélectionner sa limite puis justifier sa valeur.

1. $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n+\cos(n)$

   a. $-\infty$ **b.** $\dfrac{5}{4}$ **c.** 1 **d.** 0 **e.** $+\infty$

2. $(8+(-1)^n)\times 0,4^n$

   a. 8 **b.** 3,6 **c.** 2,8 **d.** 0 **e.** $+\infty$

3. $\dfrac{n+\sin(n\pi/2)}{2n}$

   a. 0 **b.** $+\infty$ **c.** 2 **d.** $\dfrac{1}{2}$ **e.** 1

Exercice 4 *Formes indéterminées, factorisation du terme prépondérant*

Pour chaque suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par l'une des expressions suivantes :

☞ **Étape 1 :** identifier la forme indéterminée du calcul direct de sa limite par règles opératoires.

☞ **Étape 2 :** lever l'indétermination en changeant de forme par factorisation du terme prépondérant

☞ **Étape 3 :** calculer la limite par règle opératoire avec la nouvelle forme.

1. e^n-e^{2n}
2. $-3n^2+n+10$
3. $\dfrac{3n-1}{n+4}$
4. $\dfrac{e^{-n}}{2e^{-n}+e^{-2n}}$
5. $\dfrac{4n^3-n+5}{n^2-n^3-5}$
6. $\dfrac{4n-5}{\sqrt{n}+3-n\sqrt{n}}$
7. $\dfrac{(3-n)(2+\sqrt{n})}{9-n^2}$
8. $8^{7n}-56^n$

Exercice 5 *Formes indéterminées, radicaux et expressions conjuguées*

Méthode

L'expression conjuguée de $A+B$ est $A-B$ et réciproquement.
Dans une expression avec radicaux, on peut utiliser l'expression conjuguée et l'identité remarquable $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ pour faire passer les radicaux du numérateur au dénominateur ou vice-versa.

1. Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=\sqrt{n+4}-\sqrt{n}$.

a. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{4}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}$

b. En déduire la limite de la suite u.

2. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}}$. A l'aide d'une expression conjuguée, déterminer la limite de v.

3. Soit w la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n=\sqrt{2n+\sqrt{3n}}-\sqrt{2n}$. A l'aide d'une expression conjuguée, déterminer la limite de w.

Exercice 6 *Nouvelle-Calédonie Septembre 2023 J1*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1}=5u_n-4n-3$.

1. a. Démontrer que $u_1=12$.

b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.

c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant n+1$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 7 *Amérique du Nord mars 2023 J1*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{11}{u_n}\right)$.
On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{11}{x}\right)$.

Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}\ ;\ +\infty\right[$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant\sqrt{11}$.

4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.

5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a.