Exercice 1 *Suite logistique, source APMEP Polynésie septembre 2017*

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.
Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0,3 \\ u_{n+1} & = & 0,9u_n(1-u_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0;1]$.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?
3. a. Écrire un programme Python qui renvoie la liste des termes de rang 0 à n de la suite u
   b. Écrire un programme Python qui renvoie l'année à partir de laquelle il n'y aura plus de tortues.

Exercice 2 *Source APMEP Asie juin 2017*

On considère la suite u définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} & = & \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right)u_n. \end{array}\right.$$

On définit la suite v par : pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)u_n$.

```python
def listeuv(n):
    u = [1]
    v = [1]
    for k in range(0, n):
        u.append((k+1)/(2*k+4)*u[k])
        v.append(...   )
    return u, v
```

1. Compléter les pointillés dans l'algorithme ci-contre pour que la fonction `listeuv` renvoie les listes des termes de rang 0 à n des suites u et v.

On a calculé les listes des termes de rang 0 à 4 :

```
>>> listeuv(4)
([1, 0.25, 0.08333333333333333, 0.03125, 0.0125],
 [1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625])
```

1. a. Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.
   b. Démontrer cette conjecture.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).