Certains exercices sont inspirés du cahier de calcul de Terminale, coordonné par Colas Bardavid https://colasbd.github.io/cdc-lycee/.

Exercice 1 *Vérifier si une fonction est solution d'une équation différentielle*

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on a $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}$.
La fonction f est-elle solution de l'équation différentielle $y' + y = 5\mathrm{e}^{-x}$?

Exercice 2 *Équations différentielles $y' = ay$ avec a constante*

1. Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations différentielles suivantes qui a pour inconnue une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. $y' = 3y$ **b.** $y' + 6y = 0$ **c.** $3y' - 2y = 0$ **d.** $4y' + 5y = 6y + 8y'$

2. Dans chaque cas, on donne une équation différentielle d'inconnue une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'unique solution f qui vérifie la condition fixée.

a. $\begin{cases} y' = -10y \\ f(0) = 4 \end{cases}$. **b.** $\begin{cases} 2y' - 3y = 2y + 3y' \\ f(0) = \pi \end{cases}$. **c.** $\begin{cases} y' + \sqrt{3}y = 0 \\ f(\sqrt{3}) = 5 \end{cases}$. **d.** $\begin{cases} y' = -3y + 7 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

Exercice 3 *Équation différentielle $y' = ay + b$ avec a et b constantes*

1. On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' = y - 3$ d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer une solution particulière constante de l'équation (E_1).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(E_1') : y' = y$.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E_1).

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_2), d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$(E_2) : 14y' - 2y = 13y' + 6y + 10$$

3. On considère l'équation différentielle $(E_3) : 4y' - 5y = 3$ d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'unique solution f de (E_3) qui vérifie la condition $f(3) = -2$.

Exercice 4 *Équation différentielle $y' = ay + h$ avec h fonction*

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).

2. On considère l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.

Résoudre l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Exercice 5 *Modèle de Verhulst, changement d'inconnue*

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.
Au début de l'épidémie on constate que 0,01 % de la population est contaminé.
Pour t appartenant à $[0\,;30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.
On a donc $y(0) = 0,01$.
On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0\,;30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0,05y(10-y)$$

Cette équation traduit un modèle de dynamique de population développé par Pierre-François Verhulst vers 1840.

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle $[0\,;30]$ par $z = \dfrac{1}{y}$.

   Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions : $\left\{\begin{array}{lcl} y(0) & = & 0,01 \\ y' & = & 0,05y(10-y)\end{array}\right.$

   si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\left\{\begin{array}{lcl} z(0) & = & 100 \\ z' & = & -0,5z+0,05\end{array}\right.$

2.
   a. Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre $(E)\ :\ z' = -0,5z + 0,05$.
   b. Déterminer une expression de la fonction z qui est la solution de l'équation (E) vérifiant $z(0) = 100$.
   c. En déduire une expression de la fonction y.
   d. Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours.
      On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Exercice 6 *Changement d'inconnue*

On considère l'équation différentielle définie pour les fonctions y dérivables sur $[0\,;+\infty[$par :

$$(E) \quad : \quad y'(x) = 4 - \big(y(x)\big)^2 \text{ pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0\,;+\infty[$$

On admet qu'il existe une unique solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 0$.
On considère une solution y de l'équation différentielle (E).
On admet que pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$, on a $y(x) \neq 2$.
On définit alors la fonction z dérivable sur $[0\,;+\infty[$, telle que pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$, on a :

$$z(x) = \frac{2+y(x)}{2-y(x)}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$, on a l'équivalence $z'(x) = 4z(x) \iff y'(x) = 4 - \big(y(x)\big)^2$.
2. Déduire de la question précédente qu'une solution y de l'équation différentielle (E) a pour expression $y(x) = 2\dfrac{C\mathrm{e}^{4x}-1}{C\mathrm{e}^{4x}+1}$ avec C constante réelle.
3. Déterminer l'expression de la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 0$.