Exercice 1 *Positions relatives de droites*

L'espace est rapporté à un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé. On donne les points A $(8;0;8)$, B $(10;3;10)$.

Soit la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -5+3s \\ y = 1+2s \\ z = -2s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

1. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ définie par A et B.

2. Démontrer que $\mathcal{D}$ et Δ sont non coplanaires.

Exercice 2 *Preuve du Théorème des Valeurs Intermédiaires*

On commence par une définition :

Définition 1

Une fonction f définie sur un intervalle I, est continue en un réel a appartenant à I si la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est égale à $f(a)$.

Dans cet exercice, les lettres f, a et b désignent des objets vérifiant les hypothèses ci-dessous.

Hypothèses

On considère deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction f définie sur l'intervalle $[a; b]$ telle que :

$$\boxed{f \text{ continue sur } [a;b] \quad \text{et} \quad f(a) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f(b) > 0}$$

f, a et b étant défini(e)s, on considère dans cet exercice deux suites u et v.

Définition 2

On définit deux suites u et v par récurrence avec un algorithme de *dichotomie* :

- $u_0 = a$ et $v_0 = b$
- pour tout entier $n \geqslant 0$:
  - Si $f\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right) \leqslant 0$ alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$
  - Sinon $f\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right) > 0$ et on choisit $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$

1. **a.** Compléter la fonction Python `dichotomie` ci-dessous pour qu'elle implémente l'algorithme précédent. `dichotomie` prend en paramètres une fonction f, deux réels a et b et un entier naturel n. On suppose que $a < b$, que f est définie et continue sur $[a\,;\,b]$ et que $f(a) \leqslant 0 < f(b)$.

```
def dichotomie(f, a, b, n):
    u = a
    v = b
    for k in range(n):
        m = (u + v) / 2
        if f(m) <= 0:
            ...
        else:
            ...
    return [u, v]
```

b. Ouvrir dans un navigateur Web le carnet Capytale d'URL :

https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/d317-4396549

Il faut s'authentifier avec Educonnect pour accéder au carnet qui est ensuite disponible dans l'ENT depuis *Ressources numériques / Capytale*.

- Compléter le code de la fonction `dichotomie` dans la Cellule 1 puis exécuter cette cellule avec la combinaison de touches `CTRL + RETURN`.
- Exécuter ensuite la Cellule 2 dont on donne le code ci-dessous. Recopier puis interpréter le résultat obtenu.

```
def f1(x):
    return x ** 2 - 2

print(dichotomie(f1, 0, 2, 100))
```

2. Pour tout entier naturel n on définit la propriété :

$$P(n) = \text{"}\, a \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant b\,\text{"}$$

a. Démontrer par récurrence que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

b. À l'aide du théorème de convergence monotone, démontrer que :

- la suite u converge vers une limite ℓ_u
- la suite v converge vers une limite ℓ_v

3. **a.** À partir de la définition des suites u et v, démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

b. Quelle est la nature de la suite $(v_n - u_n)_{n\geqslant 0}$?

c. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

d. Que peut-on dire de la limite ℓ_u de la suite u et de la limite ℓ_v de la suite v ?

4. On admet qu'on peut démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $f(u_n) \leqslant 0$ et $f(v_n) > 0$. La démonstration n'est pas compliquée, vous pouvez la faire si vous souhaitez tout démontrer.

On rappelle les deux propriétés ci-dessous :

Propriété 1 ***Passage à la limite dans une inégalité***

Si une suite w vérifie :

- ☞ pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n < M$
- ☞ u converge vers ℓ

alors on a $\ell \leqslant M$.

⚠ *L'inégalité est conservée mais devient large lorsqu'on passe à la limite.*

Propriété 2 ***Limite de l'image d'une suite convergente par une fonction continue***

Si une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel ℓ et si f est une fonction continue telle que pour tout entier naturel n, $f(u_n)$ est défini, alors la suite $\left(f(u_n)\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(\ell)$.

Autrement dit, si f continue alors on peut permuter f et l'opérateur limite :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)$$

a. En détaillant le raisonnement et les propriétés utilisées, démontrer que $f(\ell_u) \leqslant 0$.

b. En détaillant le raisonnement et les propriétés utilisées, démontrer que $0 \leqslant f(\ell_v)$.

c. Conclure sur l'existence d'une solution dans l'intervalle $[a\,;\,b]$ de l'équation $f(x) = 0$.

Ainsi on a démontré le *Théorème des Valeurs Intermédiaires* :

Théorème 1 ***TVI***

Soit f définie sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et vérifiant :

- ☞ f est continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$;
- ☞ $f(a) \leqslant 0 < f(b)$

Sous ces hypothèses l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution ℓ dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.